OPERE

DI

GALILEO GALILEI

OPERE

DI

GALILEO GALILEI

NOBILE FIORENTINO.

VOLUME OTTAVO.

MILANO

Dalla Società Tipografica de' Classici Italiani
contrada del Cappuccio.
ANNO 1811.

DISCORSI

E

DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE

Intorno a due nuove scienze attenenti alla Meccanica, ed ai Movimenti Locali

DI GALILEO GALILEI

Linceo, Filosofo, e Matematico primario del Serenissimo

GRAN DUCA DI TOSCANA

Con un' Appendice del centro di gravità d' alcuni Solidi.

ALL' ILLUSTRISSIMO SIGNORE IL SIG.

CONTE DI NOAILLES

Consiglier di S. M. Cristianissima, Cavalier dell' Ordine di Santo Spirito: Mariscalco de' suoi Campi, ed Eserciti: Siniscalco, e Governatore di Roerga, e Luogotenente per S. M. in Orvegna; Mio Sig. e Padr. Colendiss.

ILLUSTRISSIMO SIG.

Riconosco per un effetto della magnanimità di V. S. Illustrissima quanto gli è piaciuto disporre di questa Opera mia; non ostante che (come ella sa) confuso, e sbigottito dai mal fortunati successi di altre mie Opere, avendo meco medesimo determinato di non esporre in pubblico mai più alcuna delle mie fatiche, ma solo, acciò del tutto non restassero sepolte, essendomi persuaso di

lasciurne copia manoscritta in luogo conspicuo almeno a molti intelligenti delle materie da me trattate: e perciò avendo fatto elezione, per lo primo e più illustre luogo, di depositare in mano di V. S. Illustrissima sicuro, che per sua particolare affezione verso di me avrebbe avuto a cuore la conservazione de' miei studi, e delle mie fatiche; e perciò nel suo passaggio di qua, ritornando dalla sua Ambasciata di Roma, fui a riverirla personalmente, siccome più volte aveva fatto per lettere, e con tale incontro presentai a V. S. Illustrissima la copia di queste due Opere, che allora mi trovava avere in pronto, le quali benignamente mostrò di gradire molto, e di essere per farne sicura conserva; e col parteciparle in Francia a qualche amico suo, perito di queste scienze, mostrare, che sebbene io taceva, non però passava la vita del tutto oziosamente. Andava di poi apparecchiandomi di mandarne alcune altre copie in Germania, in Fiandra, in Inghilterra, in Ispagna, e forse anche in qualche luogo d' Italia, quando improvvisamente vengo dagli Elzeviri avvisato, come hanno sotto il torchio queste mie Opere, e che però io debba prendere risoluzione circa la dedicatoria, e prontamente mandargli il mio concetto sopra di ciò. Mosso da questa inopinata, e inaspettata nuova, sono andato meco medesimo concludendo, che

la brama di V. S. Illustrissima di suscitare, e ampliare il nome mio, col partecipare a diversi i miei scritti, abbia cagionato, che sieno pervenuti nelle mani dei detti stampatori; li quali essendosi adoperati in pubblicare altre mie Opere, abbiano voluto onorarmi di mandarle alla luce sotto le loro bellissime e ornatissime stampe. Perciò questi miei scritti debbono risentirsi, per aver avuta la sorte d' andar nell' arbitrio d' un sì gran giudice, il quale nel maraviglioso concorso di tante virtù, che rendono V. S. Illustrissima ammirabile a tutti, ella con incomparabile magnanimità, per zelo anco del ben pubblico, a cui gli è paruto che questa mia Opera dovesse conferire, ha voluto allargargli i termini, ed i confini dell' onore. Sicchè essendo il fatto ridotto in cotale stato, è ben ragionevole, che io con ogni segno più conspicuo mi dimostri grato riconoscitore del generoso affetto di V. S. Illustrissima che ha avuto cuore di accrescermi la mia fama, con farle spiegar le ale liberamente sotto il Cielo aperto, dove che a me pareva assai dono, che ella restasse in ispazj più angusti. Pertanto al nome vostro, Illustrissimo Signore, conviene che io dedichi, e consacri questo mio parto, al che fare mi stringe non solo il cumulo degli obblighi, che le tengo, ma l' interesse ancora, il quale (siami lecito così dire) mette in obbligo

V. S. Illustrissima di difendere la mia riputazione contro a chi volesse offenderla: mentre ella mi ha posto in isteccato contro agli avversarj. Onde facendomi avanti sotto il suo stendardo, e protezione umilmente me le inchino, con augurarle per premio di queste sue grazie il colmo d' ogni felicità, e grandezza.

D' Arcetri li 6. Marzo 1638.

Di V. S. Illustrissima.

Devot. Servo
Galileo Galilei.

GIORNATA PRIMA

INTERLOCUTORI

SALVIATI, SAGREDO,

E

SIMPLICIO.

Salv. Largo campo di filosofare agl' intelletti speculativi parmi, che porga la frequente pratica del famoso Arsenale (1) di voi Signori Veneziani, ed in particolare in quella parte, che Meccanica si domanda: attesochè quivi ogni sorta di strumento, e di macchina vien continuamente posta in opera da numero grande di artefici,

---

(1) *Tom. 2. ed. Fior.*

tra i quali e per l'osservazioni fatte dai loro antecessori, e per quelle, che di propria avvertenza vanno continuamente per se stessi facendo, è forza, che ve ne sieno dei peritissimi, e di finissimo discorso.

Sagr. V. S. non s'inganna punto: ed io, come per natura curioso, frequento per mio diporto la visita di questo luogo, e la pratica di questi, che noi per certa preminenza, che tengono sopra il resto della maestranza, domandiamo Proti; la conferenza dei quali mi ha più volte ajutato nell'investigazione della ragione di effetti non solo maravigliosi, ma reconditi ancora, e quasi inopinabili: è vero, che talvolta anco mi ha messo in confusione, e in disperazione di poter penetrare, come possa seguire quello, che lontano da ogni mio concetto mi dimostra il senso esser vero; e pur quello, che poco fa ci diceva quel buon vecchio, è un dettato, ed una proposizione bene assai vulgata; ma però io la reputava in tutto vana, come molte altre, che sono in bocca dei poco intelligenti, credo da loro introdotte per mostrar di saper dir qualche cosa intorno a quello, di che non son capaci.

Salv. V. S. vuol forse dire di quell'ultimo pronunziato, che ei proferì, mentre ricercavamo d'intendere, per qual ragione facevano tanto maggior apparecchio di sostegni, armamenti, ed altri ripari, e for-

tificazioni intorno a quella gran Galeazza, che si doveva varare, che non si fa intorno a' Vascelli minori; dove egli rispose ciò farsi per evitare il pericolo di direnarsi, oppressa dal gravissimo peso della sua vasta mole, inconveniente, al quale non son soggetti i legni minori?

Sagr. Di cotesto intendo, e sopra tutto dell' ultima conclusione, che ei soggiunse, la quale io ho sempre stimata concetto vano del volgo: cioè che in queste ed altre simili macchine non bisogna argomentare dalle piccole alle grandi; perchè molte invenzioni di macchine riescono in piccolo, che in grande poi non sussistono. Ma essendo che tutte le ragioni della Meccanica hanno i fondamenti loro nella Geometria, nella quale non vedo, che la grandezza, e la piccolezza faccia i cerchi, i triangoli, i cilindri, i coni, e qualunque altre figure solide soggette ad altre passioni queste, e ad altre quelle, quando la macchina grande sia fabbricata in tutti i suoi membri conforme alle proporzioni della minore, che sia valida, e resistente all' esercizio, al quale ella è destinata, non so vedere, perchè essa ancora non sia esente dagl' incontri, che sopraggiugner gli possono sinistri, e destruttori.

Salv. Il detto del volgo è assolutamente vano; e talmente vano, che il suo contrario si potrà profferire con altrettan-

ta verità, dicendo, che molte macchine si potranno far più perfette in grande, che in piccolo, come per esempio un Oriuolo, che mostri, e batta le ore, più giusto si farà di una tal grandezza, che di un' altra minore. Con miglior fondamento usurpano quel medesimo detto altri più intelligenti, i quali della riuscita di tali macchine grandi non conforme a quello, che si raccoglie dalle pure, ed astratte dimostrazioni Geometriche, ne rimettono la causa nell' imperfezione dalla materia, che soggiace a molte alterazioni, ed imperfezioni. Ma qui non so s' io potrò senza inciampare in qualche nota di arroganza dire, che nè anco il ricorrere all' imperfezioni della materia, potenti a contaminare le purissime dimostrazioni Matematiche, basti a scusare l'inobbedienza delle macchine in concreto alle medesime astratte e ideali: tuttavia io pure il dirò affermando, che astraendo tutte le imperfezioni della materia, e supponendola perfettissima, ed inalterabile, e da ogni accidental mutazione esente, tuttavia il solo esser materiale, fa, che la macchina maggiore fabbricata dell' istessa materia, e coll' istesse proporzioni, che la minore, in tutte l'altre condizioni risponderà con giusta simmetria alla minore, fuor che nella robustezza, e resistenza contro alle violenti invasioni: ma quanto più sarà grande, tanto a proporzione sarà più debole. E perchè io sup-

pongo la materia esser inalterabile, cioè sempre l' istessa, è manifesto, che di lei come di affezione esterna e necessaria, si possono produr dimostrazioni non meno dell' altre schiette, e pure matematiche. Però, Sig. Sagredo, revochi pur l' opinione, che teneva, e forse insieme con tutti gli altri, che nella Meccanica han fatto studio, che le macchine, e le fabbriche composte delle medesime materie con puntuale osservanza delle medesime proporzioni tra le loro parti debban essere egualmente, o per dir meglio, proporzionalmente disposte al resistere, e al cedere alle invasioni, ed impeti esterni, perchè si può Geometricamente dimostrare sempre le maggiori essere a proporzione men resistenti, che le minori: sicchè ultimamente non solo di tutte le macchine, e fabbriche artifiziali, ma delle naturali ancora sia un termine necessariamente ascritto, oltre al quale nè l' arte, nè la natura possa trapassare: trapassar dico con osservar sempre l' istesse proporzioni coll' identità della materia.

Sagr. Io già mi sento rivolgere il cervello, e quasi nugola dal baleno repentinamente aperta ingombrarmisi la mente da momentanea, ed insolita luce, che da lontano mi accenna, e subito confonde, ed asconde immaginazioni straniere, ed indigeste. E da quanto ella ha detto parmi che dovrebbe seguire, che fusse im-

possibil cosa costruire due fabbriche dell' istessa materia simili, e diseguali, e tra di loro con egual proporzione resistenti; e quando ciò sia, sarà anco impossibile trovar due sole aste dell' istesso legno tra di loro simili in robustezza, e valore, ma diseguali in grandezza.

Salv. Così è, Sig. Sagredo; e per meglio assicurarci, che noi convenghiamo nel medesimo concetto, dico, che se noi ridurremo un' asta di legno a tal lunghezza e grossezza, che fitta v. gr. in un muro ad angoli retti, cioè parallela all' orizzonte, sia ridotta all'ultima lunghezza, che si possa reggere, sicchè allungata un pelo più, si spezzasse gravata dal proprio peso, questa sarà unica al mondo: sicchè essendo per esempio la sua lunghezza centupla della sua grossezza, nessuna altra asta della medesima materia potrà ritrovarsi, che essendo in lunghezza centupla della sua grossezza, sia come quella precisamente abile a sostener se medesima, e nulla di più: ma tutte le maggiori si fiaccheranno, e le minori saranno potenti a sostenere oltre al proprio peso qualche altro appresso. E questo, che io dico dello stato di regger se medesimo, intendasi detto di ogni altra costituzione, e così se un corrente potrà reggere il peso di dieci correnti suoi eguali, una trave simile a lui non potrà altramente reggere il peso di dieci sue eguali. Ma notino in grazia V. S. e il Sig. e

il Sig. Simpl. nostro, quanto le conclusioni vere, benchè nel primo aspetto sembrino improbabili, additate solamente qualche poco depongono le vesti che le occultavano, e nude e semplici fanno de' loro segreti gioconda mostra. Chi non vede, come un cavallo cadendo da un' altezza di tre braccia, o quattro, si romperà l'ossa, ma un cane da una tale, e un gatto da una di otto, o dieci, non si farà mal nessuno, come nè un grillo da una torre, nè una formica precipitandosi dall'orbe lunare? I piccoli fanciulli restano illesi in cadute, dove i provetti si rompono gli stinchi, o la testa. E come gli animali più piccoli sono a proporzione più robusti, e forti dei maggiori, così le piante minori meglio si sostentano: e già credo, che amendue voi apprendiate, che una quercia dugento braccia alta non potrebbe sostenere i suoi rami sparsi alla similitudine di una di mediocre grandezza, e che la natura non potrebbe fare un cavallo grande per venti cavalli, nè un gigante dieci volte più alto di un uomo, se non o miracolosamente, o coll'alterar assai le proporzioni delle membra, ed in particolare dell' ossa, ingrossandole molto e molto sopra la simetria dell' ossa comuni. Il creder parimente, che nelle macchine artifiziali ugualmente siene fattibili, e conservabili le grandissime, e le piccole, è errore manifesto: e così per esempio piccole Guglie,

Colonnette, ed altre solide figure sicuramente si potranno maneggiare, distendere e rizzare senza risico di rompersi, che le grandissime per ogni sinistro accidente anderanno in pezzi, e non per altra cagione, che pel lor proprio peso. E qui è forza, che io vi racconti un caso degno veramente di esser saputo, come sono tutti gli accidenti, che accadono fuori dell'aspettazione; e massime quando il partito preso per ovviare a uno inconveniente riesce poi causa potissima del disordine. Era una grossissima Colonna di marmo distesa, e posata presso alle sue estremità sopra due pezzi di trave; cadde in pensiero dopo certo tempo ad un Meccanico, che fusse bene per maggiormente assicurarsi, che gravata dal proprio peso non si rompesse nel mezzo, supporgli anco in questa parte un terzo simile sostegno; parve il consiglio generalmente molto opportuno, ma l'esito lo dimostrò essere stato tutto l'opposito: attesochè non passarono molti mesi, che la Colonna si trovò fessa, e rotta giusto sopra il nuovo appoggio di mezzo.

Simp. Accidente in vero maraviglioso, e veramente *praeter spem*, quando però fusse derivato dall'aggiugnervi il nuovo sostegno di mezzo.

Salv. Da quello sicuramente derivò egli, e la riconosciuta cagion dell'effetto leva la maraviglia: perchè deposti in pia-

na terra i due pezzi della Colonna, si vedde, che l'uno dei travi, su il quale appoggiava una delle testate, si era per la lunghezza del tempo infracidato, ed avvallato, e restando quel di mezzo durissimo, e forte, fu causa, che la metà della Colonna restasse in aria abbandonata dall' estremo sostegno; onde il proprio soverchio peso le fece fare quello, che non avrebbe fatto, se sola sopra i due primi si fosse appoggiata, perchè all'avvallarsi qual si fusse di loro, ella ancora l'avrebbe seguito. E qui non si può dubitare, che tal accidente non sarebbe avvenuto in una piccola Colonna, benchè della medesima pietra, e di lunghezza rispondente alla sua grossezza colla proporzione medesima della grossezza, e lunghezza della Colonna grande.

Sagr. Già sin qui resto io assicurato della verità dell' effetto, ma non penetro già la ragione, come nel crescersi la materia non debba coll' istesso ragguaglio multiplicarsi la resistenza, e gagliardia; e tanto più mi confondo, quanto per l' opposito vedo in altri casi crescersi molto più la robustezza alla resistenza al rompersi, che non cresce l' ingrossamento della materia; che se v. gr. saranno due chiodi fitti in un muro, l' uno più grosso il doppio dell' altro, quello reggerà non solamente doppio peso di questo, ma triplo, e quadruplo.

Salv. Dite pure ottuplo, nè direte lontano dal vero: nè questo effetto contraria a quello, ancorchè in sembiante apparisca così diverso.

Sagr. Adunque, Sig. Salviati, spianateci questi scogli, e dichiarateci queste oscurità, sè ne avete il modo: che ben conghietturo questa materia delle resistenze essere un campo pieno di belle, ed utili contemplazioni, e se vi contentate, che questo sia il soggetto dei nostri ragionamenti di oggi, a me, e credo al Sig. Simp. sarà gratissimo.

Salv. Non posso mancar di servirle, purchè la memoria serva, me in somministrarmi quello, che già appresi dal nostro Accademico, che sopra tal materia aveva fatte molte speculazioni, e tutte conforme al suo solito Geometricamente dimostrate, in modo che non senza ragione questa sua potrebbe chiamarsi una nuova scienza; perchè sebbene alcune delle conclusioni sono state da altri, e prima di tutti da Aristotile osservate, tuttavia ne sono delle più belle, nè (quello, che più importa) dai loro primarj, e indubitati fondamenti con necessarie dimostrazioni provate. E perchè, come dico, voglio dimostrativamente accertarvi, e non con solamente probabili discorsi persuadervi; supponendo, che abbiate quella cognizione delle conclusioni Meccaniche da altri sin qui fondatamente trattate, che per lo no-

stro bisogno sarà necessaria; conviene, che avanti ogni altra cosa consideriamo, quale effetto sia quello, che si opera nella frazione di un legno, o di altro solido, le cui parti saldamente sono attaccate; perchè questa è la prima nozione, nella qual consiste il primo, e semplice principio, che come notissimo conviene supporsi. Per più chiara esplicazione di che: segniamo il Cilindro, o Prisma A B (Fig. 1.) di legno, o di altra materia solida, e coerente, fermato di sopra in A, e pendente a piombo, al quale nell' altra estremità B sia attaccato il peso C; è manifesto, che, qualunque si sia la tenacità, e coerenza tra di loro delle parti di esso solido, purchè non sia infinita, potrà esser superata dalla forza del traente peso C: la cui gravità pongo, che possa accrescersi, quanto ne piace, e esso solido finalmente si strapperà a guisa di una corda. E siccome nella corda noi intendiamo la sua resistenza derivare dalla moltitudine delle fila della canapa, che la compongono; così nel legno si scorgono le sue fibre, e filamenti distesi per lungo, che lo rendono grandemente più resistente allo strappamento, che non sarebbe qualsivoglia canapo della medesima grossezza: ma nel Cilindro di pietra, o di metallo la coerenza (che ancora par maggiore) delle sue parti dipende da altro glutine, che da filamenti, o fibre, e pure essi ancora da valido tiramento vengono spezzati.

sola separazione dell' uno dall' altro strisciando.

Sagr. Aggiungasi in confermazion di questo il vedersi talvolta romper la corda non pel tirarla per lo lungo, ma solo per lo soverchiamente attorcerla: argomento pare a me concludente, le fila esser talmente tra di loro scambievolmente compresse, che le comprimenti non permettono alle compresse scorrer quel minimo, che sarebbe necessario per allungar le spire, acciocchè potessero circondar la fune, che nel torcimento si scorcia, ed in conseguenza qualche poco s' ingrossa.

Salv. Voi benissimo dite: ma considerate appresso, come una verità si tira dietro l' altra. Quel filo, che stretto tra le dita non segue chi con qualche forza tirandolo vorrebbe di tra esse sottrarlo, resiste, perchè da doppia compressione vien ritenuto; imperciocchè non meno il dito superiore preme contro all' inferiore, che questo si prema contro a quello. E non è dubbio, che quando di queste due premute se ne potesse ritenere una sola, resterebbe la metà di quella resistenza, che dalle due congiunte dipendeva: ma perchè non si può coll' alzar, v. gr. il dito superiore levar la sua pressione senza rimuovere anco l' altra parte, conviene con nuovo arzifizio conservarne una di loro, e trovar modo, che l' istesso filo comprima se medesimo contro al dito, o altro corpo

solido, sopra il quale si posa, e far sì che l'istessa forza, che le tira per separarnelo, tanto più ve lo comprima, quanto più gagliardamente lo tira: e questo si conseguirà coll'avvolgere a guisa di spira il filo medesimo intorno al solido. Il che acciò meglio s'intenda, ne segnerò un poco di figura; e questi A B, C D (Fig. II.) siano due cilindri, e tra essi disteso il filo E F, che per maggior chiarezza ce lo figureremo essere una cordicella: non è dubbio, che premendo gagliardamente i due cilindri l'uno contro all'altro, la corda F E tirata dall'estremità F resisterà a non piccola violenza prima che scorrere tra i due solidi comprimentila: ma se rimuoveremo l'uno di loro, la corda, benchè continui di toccar l'altro, non però da tal toccamento sarà ritenuta, che liberamente non iscorra. Ma se ritenendola, benchè debolmente attaccata verso la sommità del cilindro A, l'avvolgeremo intorno a quello a foggia di spira A F L O T R, e dal capo R la tireremo, è manifesto, che ella comincierà a stringere il cilindro, e se le spire, e voltate saranno molte, sempre più nel validamente tirare si comprimerà la corda addosso al cilindro: e facendosi colla moltiplicazione delle spire più lungo il toccamento, ed in conseguenza men superabile, difficile si farà sempre più lo scorrer della corda, e l'acconsentir alla traente forza. Or chi non vede, che tale

due capi; l' uno dei quali è quella decantata repugnanza che ha la natura all'ammettere il vacuo: per l'altro bisogna (non bastando questo del vacuo) introdur qualche glutine, visco, o colla, che tenacemente colleghi le particole, delle quali esso corpo è composto. Dirò prima del vacuo, mostrando con chiare esperienze, quale e quanta sia la sua virtù. E prima il vedersi, quando ne piaccia, due piastre di marmo, di metallo, o di vetro esquisitamente spianate, pulite, e lustre, che posata l'una su l'altra, senza veruna fatica se gli muove sopra strisciando (sicuro argomento, che nessun glutine le congiunge) ma, che volendo separarle, mantenendole equidistanti, tal repugnanza si trova, che la superiore solleva, e si tira dietro l'altra, e perpetuamente la ritiene sollevata, ancorchè assai grossa, e grave, evidentemente ci mostra l'orrore della natura nel dover ammettere, sebben per breve momento di tempo, lo spazio voto, che tra di quelle rimarrebbe, avanti che il concorso delle parti dell'aria circostante l'avesse occupato, e ripieno. Vedesi anco, che quando bene tali due lastre non fossero esattamente pulite, e perciò che il lor contatto non fosse esquisito del tutto, nel volerle separar lentamente niuna renitenza si trova fuor di quella della sola gravità, ma in un alzamento repentino l'inferior pietra si solleva, ma

subito ricade, seguendo solamente la sovrana per quel brevissimo tempo, che basta per la distrazione di quella poca di aria, che s' interponeva tra le lastre, che non ben combagiavano, e per l' ingresso dell' altra circonfusa. Tal resistenza, che così sensatamente si scorge tra le due lastre, non si può dubitare, che parimente non risegga tra le parti di un solido, e che nel loro attaccamento non entri almanco a parte, e come causa concomitante.

Sagr. Fermate di grazia, e concedetemi, che io dica una particolar considerazione, che pure ora mi è caduta in mente: e questa è, che il vedere, come la piastra inferiore segue la superiore, e che con moto velocissimo vien sollevata, ci rende sicuri, che contro al detto di molti Filosofi, e forse di Aristotile medesimo, il moto nel vacuo non sarebbe instantaneo; perchè quando fosse tale, le nominate due lastre senza repugnanza veruna si separerebbero, giacchè il medesimo instante di tempo basterebbe per la loro separazione, e per lo concorso dell' aria ambiente a riempir quel vacuo, che tra esse potesse restare. Dal seguir dunque che fa l' inferior lastra la superiore, si raccoglie, come nel vacuo il moto non sarebbe instantaneo. E si raccoglie insieme, che pur tra le medesime piastre resti qualche vacuo almeno per brevissimo tempo, cioè per tutto quello, che passa nel

violentate da forze gagliarde, che dirittamente le tirino, finalmente si separano, e si dividono. E quando io trovi modo di distinguer questa già conosciuta resistenza dipendente dal vacuo da ogni altra, qualunque ella si fosse, che con lei concorresse in fortificar l'attaccamento, e che io vi faccia vedere, come essa sola non sia a gran pezzo bastante per tale effetto, non concederete voi, che sia necessario introdurne altra? Ajutatelo, Sig. Simplicio, giacchè egli sta ambiguo sopra quello, che debba rispondere.

Simp. È forza, che la sospensione del Sig. Sagredo sia per altro rispetto, non restando luogo di dubitare sopra sì chiara, e necessaria conseguenza.

Sagr. Voi, Sig. Simplicio, l'avete indovinata. Andava pensando, se non bastando un milion di oro l'anno, che vien di Spagna per pagar l'esercito, fusse necessario fare altra provvisione, che di danari per le paghe de'Soldati. Ma seguitate pur, Sig. Salviati, e supponendo, che io ammetta la vostra conseguenza, mostrateci il modo di separare l'operazione del vacuo dall'altre, e misurandola fateci vedere, come ella sia scarsa per l'effetto, di che si parla.

Salv. Il vostro Demonio vi assiste. Dirò il modo dell'apparar la virtù del vacuo dall'altre, e poi la maniera del misurarla. E per appartarla piglieremo una

materia continua, le cui parti manchino di ogni altra resistenza alla separazione fuor che di quella del vacuo, quale a lungo è stato dimostrato in certo Trattato del nostro Accademico esser l'acqua. Talchè qualunque volta si disponesse un cilindro di acqua, e che attratto si sentisse resistenza allo staccamento delle sue parti, questo da altra cagione, che dalla repugnanza al vacuo, non potrebbe riconoscersi. Per far poi una tale esperienza mi sono immaginato un artifizio, il quale coll' ajuto di un poco di disegno meglio, che con semplici parole, potrò dichiarare. Figuro questo C A B D (Fig. iv.) essere il profilo di un cilindro di metallo, o di vetro, che sarebbe meglio voto dentro, ma giustissimamente tornito, nel cui concavo entri con esquisitissimo contatto un cilindro di legno, il cui profilo noto E G H F, il qual cilindro si possa spignere in su, e in giù, e questo voglio, che sia bucato nel mezzo, sicchè vi passi un filo di ferro oncinato nell'estremità K, e l'altro capo I vada ingrossandosi in forma di cono, o turbine, facendo che il foro fatto nel legno sia nella parte di sopra esso ancora incavato in forma di conica superficie aggiustata puntualmente per ricevere la conica estremità I del ferro I K, qualunque volta si tiri in giù dalla parte K. Inserto il legno, o vogliamolo chiamar zaffo E H nel cavo cilindro A D,

non voglio, che arrivi sino alla superior superficie di esso cilindro, ma che ne resti lontano due, o tre dita, e tale spazio dee esser ripieno di acqua, la quale vi si metterà tenendo il vaso colla bocca C D all'insù, e calandovi sopra lo zaffo E H, col tenere il turbine I remoto alquanto dal cavo del legno, per lasciar l'esito all'aria, che nel calcare lo zaffo se ne uscirà per lo foro del legno, che perciò si fa alquanto più largo della grossezza dell'asticciuola di ferro I K. Dato l'esito all'aria, e ritirato il ferro, che ben suggelli su il legno col suo turbine, si rivolterà il vaso tutto colla bocca all'ingiù, ed attaccando all'oncino K un recipiente da mettervi dentro rena, o altra materia grave, si caricherà tanto, che finalmente la superior superficie E F dello zaffo si staccherà dall'inferiore dell'acqua, alla quale niente altro la teneva congiunta, che la repugnanza del vacuo: pesando poi lo zaffo col ferro, col recipiente, e con ciò, che vi sarà dentro, averemo la quantità della forza del vacuo: e se attaccato a un cilindro di marmo, o di cristallo grosso, quanto il cilindro dell'acqua, però tale, che insieme col peso proprio dell'istesso marmo, o cristallo pareggi la gravità di tutte le nominate bagaglie, ne seguirà la rottura, potremo senza verun dubbio affermare, la sola ragion del vacuo tener le parti del marmo, e cristallo congiunte:

ma non bastando, e che per romperlo bisogni aggiugnervi quattro volte altrettanto peso, converrà dire la resistenza del vacuo esser delle cinque parti una, e l'altra quadrupla di quella del vacuo.

Simpl. Non si può negare, che l'invenzione non sia ingegnosa, ma l'ho per soggetta a molte difficoltà, che me la rendono dubbia; perchè chi ci assicura, che l'aria non possa penetrar tra il vetro, e lo zaffo, ancorchè si circondi bene di stoppa, o altra materia cedente? e così, acciocchè il cono I saldi bene il foro, forse non basterebbe l'ungerlo con cera, o trementina. In oltre perchè non potrebbero le parti dell'acqua distrarsi, e rarefarsi? perchè non penetrare aria, o esalazioni, o altre sostanze più sottili per le porosità del legno, o anche dell'istesso vetro?

Salv. Molto destramente ci muove il Sig. Simplicio le difficoltà, ed in parte ci somministra i rimedj, quanto alla penetrazion dell'aria per lo legno, o tra il legno, e il vetro. Ma io oltre di ciò noto, che potremo nell'istesso tempo accorgerci con acquisto di nuove cognizioni, se le promosse difficoltà avranno luogo. Imperocchè se l'acqua sarà per natura, sebben con violenza distraibile, come accade nell'aria, si vedrà lo zaffo calare; e se faremo nella parte superiore del vetro un poco di ombelico prominente, come que-

sto V, penetrando per la sostanza, o porosità del vetro, o del legno aria, o altra più tenue, e spiritosa materia, si vedrà radunare (cedendogli l' acqua) nell' eminenza V, le quali cose quando non si scorgano, verremo assicurati l' esperienza esser colle debite cautele stata tentata; e conosceremo l' acqua non esser distraibile, nè il vetro esser permeabile da veruna materia, benchè sottilissima.

Sagr. Ed io mercè di questi discorsi ritrovo la causa di un effetto, che lungo tempo mi ha tenuto la mente ingombrata di maraviglia, e vota d' intelligenza. Osservai già una Citerna, nella quale per trarne l' acqua fu fatto fare una tromba da chi forse credeva, ma vanamente, di poterne cavare con minor fatica l' istessa, o maggior quantità, che colle secchie ordinarie: ed ha questa tromba il suo stantuffo, e animella su alta, sicchè l' acqua si fa salire per attrazione, e non per impulso, come fanno le trombe, che hanno l' ordigno da basso. Questa, sinchè nella Citerna vi è acqua sino ad una determinata altezza, la tira abbondantemente, ma quando l' acqua abbassa oltre a un determinato segno, la tromba non lavora più. Io credetti la prima volta che osservai tale accidente, che l' ordigno fosse guasto, e trovato il Maestro, acciò lo raccomodasse, mi disse, che non vi era altrimente difetto alcuno, fuor che nell' acqua, la quale

essendosi abbassata troppo, non pativa di essere alzata a tanta altezza; e mi soggiunse nè con Trombe, nè con altra macchine, che sollevi l'acqua per attrazione, esser possibile farla montare un capello più di diciotto braccia, e sieno le Trombe larghe, o strette, questa è la misura dell' altezza limitatissima. Ed io sin ora sono stato così poco accorto, che intendendo, che una corda, una mazza di legno, e una verga di ferro si può tanto e tanto allungare, che finalmente il suo proprio peso la strappi, tenendola attaccata in alto, non mi è sovvenuto, che l' istesso molto più agevolmente accaderà di una corda, o verga di acqua. E che altro è quello, che si attrae nella Tromba, che un cilindro di acqua, il quale avendo la sua attaccatura di sopra, allungato più e più, finalmente arriva a quel termine, oltre al quale tirato dal suo già fatto soverchio peso non altrimente, che se fosse una corda, si strappa?

Salv. Così puntualmente cammina il negozio, e perchè la medesima altezza delle diciotto braccia è il prefisso termine dell' altezza, alla quale qualsivoglia quantità di acqua, sieno cioè le Trombe larghissime, o strette, o strettissime, quanto un fil di paglia, può sostentarsi, tuttavolta che noi peseremo l' acqua contenuta in diciotto braccia di cannone, sia largo, o stretto, avremo il valore della resistenza

del vacuo nei cilindri di qualsivoglia materia solida, grossi, quanto sono i concavi dei cannoni proposti. E giacchè abbiamo detto tanto, mostriamo come di tutti i metalli, pietre, legni, vetri, ec. si può facilmente ritrovare sino a quanta lunghezza si potrebbono allungare cilindri, fili, o verghe di qualsivoglia grossezza, oltre alla quale gravati dal proprio peso più non potrebber reggersi, ma si strapperebbero. Piglisi per esempio un fil di rame di qualsivoglia grossezza, e lunghezza, e fermato un de' suoi capi ad alto, si vada aggiugnendo all' altro maggior e maggior peso, sicchè finalmente si strappi, e sia il peso massimo, che potesse sostenere, v. gr. cinquanta libbre. È manifesto, che cinquanta libbre di rame oltre al proprio peso, che sia per esempio un ottavo di oncia tirato in filo di tal grossezza, sarebbe la lunghezza massima del filo, che se stèsso potèsse reggere. Misurisi poi quanto era lungo il filo, che si strappò, e sia, v. gr. un braccio: e perchè pesò un ottavo di oncia, e resse se stesso, e cinquanta libbre appresso, che sono ottavi di oncia quattromila ottocento, diremo tutti i fili di rame, qualunque si sia la lor grossezza, potersi reggere sino alla lunghezza di quattromila ottocento un braccio, e non più; e così una verga di rame potendo reggersi sino alla lunghezza di quattromila ottocento un braccio, la resistenza che ella

trova dipendente dal vacuo, rispetto al restante è tanta, quanto importa il peso di una verga di acqua lunga braccia diciotto, e grossa quanto quella stessa di rame; e trovandosi v. gr. il rame esser nove volte più grave dell' acqua, di qualunque verga di rame la resistenza allo strapparsi, dipendente dalla ragion del vacuo, importa quanto è il peso di due braccia dell' istessa verga; e con simil discorso, ed operazione si potranno trovare le lunghezze delle fila, o verghe di tutte le materie solide ridotte alla massima, che sostener si possa, ed insieme qual parte abbia il vacuo nella lor resistenza.

Sagr. Resta ora, che ci dichiate in qual cosa consista il resto della renitenza, cioè, qual sia il glutine o visco, che ritiene attaccate le parti del solido, oltre a quello che deriva dal vacuo, perchè io non saprei immaginarmi, qual colla sia quella, che non possa essere arsa e consumata in una ardentissima fornace in due, tre e quattro mesi, nè in dieci o cento, dove stando tanto tempo argento, oro, e vetro liquefatti, cavati poi tornano le parti loro nel freddarsi a riunirsi e rattaccarsi, come prima. Oltrechè la medesima difficoltà, che ho nell' attaccamento delle parti del vetro, l'avrò io nelle parti della colla, cioè, che cosa sia quella, che le tiene così saldamente congiunte.

Salv. Pur poco fa vi dissi, che il vo-

stro Demonio vi assisteva: sono io ancora nelle medesime angustie, ed ancora io toccando con mano, come la repugnanza del vacuo è indubitabilmente quella che non permette, se non con gran violenza, la separazione delle due lastre, e più delle due gran parti della Colonna di marmo o di bronzo, non so vedere come abbia ad aver luogo, ed esser parimente cagione della coerenza delle parti minori, e sino delle minime ultime delle medesime materie; ed essendo che di un effetto una sola è la vera e purissima causa, mentre io non trovo altro glutine, perchè non debbo tentar di vedere, se questo del vacuo che si trova, può bastarci?

Simp. Se di già voi avete dimostrato la resistenza del gran vacuo nel separarsi le due gran parti di un solido esser piccolissima in comparazion di quella che tien congiunte le particole minime, come non volete tener più che per certo, questa esser diversissima da quella?

Salv. A questo rispose il Sig. Sagr. che pur si pagavano tutti i particolari Soldati con danari raccolti da imposizioni generali di soldi e di quattrini, sebbene un milion di oro non bastava a pagar tutto l'esercito. E chi sa, che altri minutissimi vacui non lavorino per le minutissime particole, sicchè per tutto sia dell'istessa moneta quello con che si tengono tutte le parti congiunte? Io vi dirò quello che ta-

lora mi è passato per l'immaginazione: ve lo do, non come verità risoluta, ma come una qual si sia fantasia piena anco d'indigestioni sottoponendola a più alte contemplazioni. Cavatene se nulla vi è che vi gusti; il resto giudicatelo, come più vi pare. Nel considerar talvolta, come andando il fuoco serpendo tra le minime particelle di questo, e di quel metallo, che tanto saldamente si trovano congiunte, finalmente le separa e disunisce; e come poi partendosi il fuoco tornano colla medesima tenacità di prima a ricongiungersi senza diminuirsi punto la quantità nell'oro, e pochissimo in altri metalli anco per lungo tempo, che restino distratti, pensai, che ciò potesse accadere, perchè le sottilissime particole del fuoco penetrando per gli angusti pori del metallo (tra i quali per la loro strettezza non potessero passare i minimi dell'aria, nè di molti altri fluidi) col riempire i minimi vacui tra esse frapposti liberassero le minime particole di quello dalla violenza, colla quale i medesimi vacui l'una contro l'altra attraggono, proibendogli la separazione; e così potendosi liberamente muovere, la lor massa ne divenisse fluida, e tale restasse, sin che gl'ignicoli tra esse dimorassero: partendosi poi quelli, e lasciando i pristini vacui, tornasse la lor solita attrazione, ed in conseguenza l'attaccamento delle parti. Ed all'instanza del Sig. Simp. parmi che si pos-

sa rispondere, che sebbene tali vacui sarebber piccolissimi, ed in conseguenza ciascheduno facile ad esser superato, tuttavia l' innumerabile moltitudine innumerabilmente (per così dire) multiplica le resistenze: e quale, e quanta sia la forza, che da numero immenso di debolissimi momenti insieme congiunti risulta, porgacene evidentissimo argomento il veder noi un peso di milioni di libbre sostenuto da canapi grossissimi, cedere, e finalmente lasciarsi vincere e sollevare dall' assalto degl' innumerabili atomi di acqua, li quali, o spinti dall' Austro, o pure che distesi in tenuissima nebbia si vadano movendo per l' aria, vanno a cacciarsi tra fibra e fibra dei canapi tiratissimi, nè può l' immensa forza del pendente peso vietargli l'entrata; sicchè penetrando per gli angusti meati ingrossano le corde, e per conseguenza le scorciano, onde la mole gravissima a forza vien sollevata.

Sagr. Ei non è dubbio alcuno, che mentre una resistenza non sia infinita, può dalla moltitudine di minutissime forze esser superata; sicchè anco un numero di formiche strascicherebbe per terra una nave carica di grano: perchè il senso ci mostra quotidianamente, che una formica destramente porta un granello; e chiara cosa è, che nella nave non sono infiniti granelli, ma compresi dentro a qualche numero, del quale se ne può prendere un

altro quarto, e sei volte maggiore, al quale se se ne prenderà un altro di formiche eguale, e si porranno in opera, condurranno per terra il grano, e la nave ancora. È ben vero, che bisognerà, che il numero sia grande, come anco per mio parere quello dei vacui che tengono attaccati i minimi del metallo.

Salv. Ma quando bisognasse, che fussero anche infiniti, l'avete voi forse per impossibile?

Sagr. No, quando quel metallo fusse una mole infinita: altrimenti

Salv. Altrimenti che? Orsù già che si è messo mano ai Paradossi, vediamo se in qualche maniera si potesse dimostrare, come in una continua estensione finita non repugni il potersi ritrovare infiniti vacui; e nell'istesso tempo ci verrà se non altro, almeno arrecata una soluzione del più ammirabile problema, che sia da Aristotile messo tra quelli che esso medesimo addimanda ammirandi, dico tra le questioni Meccaniche; e la soluzione potrebbe esser per avventura non meno esplicante e concludente di quella che egli medesimo ne arreca, e diversa anco da quello che molto acutamente vi considera il dottissimo Mons. di Guevara. Ma bisogna prima dichiarare una proposizione non toccata da altri, dalla quale dipende lo scioglimento della quistione, che poi, s'io non m'inganno, si tira dietro altre notizie nuove e ammirande.

Per intelligenza di che accuratamente descriveremo la figura. Però intendiamo un poligono equilatero ed equiangolo di quanti lati esser si voglia, descritto intorno a questo centro G (Fig. v.) e sia per ora un esagono A B C D E F, simile al quale, e ad esso concentrico ne descriveremo un altro minore, quale noteremo H I K L M N, e del maggiore si prolunghi un lato A B indeterminatamente verso S, e del minore il rispondente lato H I sia verso la medesima parte similmente prodotto, segnando la linea H T parallela all' A S, e pel centro passi l'altra alle medesime equidistante G V. Fatto questo il maggior poligono rivolgasi sopra la linea A S portando seco l'altro poligono minore. È chiaro che stando fisso il punto B termine del lato A B, mentre si comincia la revoluzione, l'angolo A si solleverà, e 'l punto C s'abbasserà descrivendo l'arco C Q, sicchè il lato B C si adatti alla linea a se stesso eguale B Q: ma in tal conversione l'angolo I del minor poligono si eleverà sopra la linea I T, per esser la I B obbliqua sopra l'A S: nè prima tornerà il punto I su la parallela I T, se non quando il punto C sarà pervenuto in Q: allora l' I sarà caduto in O, dopo aver descritto l'arco I O fuori della linea H T, ed allora il lato I K sarà passato in O P. Ma il centro G tra tanto sempre averà camminato fuori della linea G V, su la quale non sarà tornato, se non dopo aver

descritto l'arco G C. Fatto questo primo passo, il poligono maggiore sarà trasferito a posare col lato B C su la linea B Q, il lato I K del minore sopra la linea O P, avendo saltata tutta la parte I O senza toccarla, e 'l centro G pervenuto in C, facendo tutto il suo corso fuori della parallela G V. E finalmente tutta la figura si sarà rimessa in un posto simile al primo; sicchè continuandosi la revoluzione, e venendo al secondo passo il lato del maggior poligono D C si adatterà alla parte Q X, il K L del minore (avendo prima saltato l'arco P Y) caderà in Y Z, ed il centro procedendo sempre fuori della G V in essa caderà solamente in R, dopo il gran salto C R. Ed in ultimo finita una intera conversione, il maggior poligono avrà calcate sopra la sua A S sei linee eguali al suo perimetro senza veruna interposizione, il poligono minore avrà parimente impresse sei linee eguali all'ambito suo, ma discontinuate dall'interposizione di cinque archi, sotto i quali restano le corde, parti della parallela H T non tocche dal poligono; e finalmente il centro G non è convenuto mai con la parallela G V, salvo che in sei punti. Di qui potete comprendere, come lo spazio passato dal minor poligono è quasi eguale al passato dal maggiore, cioè la linea H T alla A S, della quale è solamente minore, quanto è la corda d'uno di questi archi, intendendo però la

linea H T insieme con gli spazj dei cinque archi. Ora questo che vi ho esposto e dichiarato nell' esempio di questi esagoni, vorrei che intendeste accadere di tutti gli altri poligoni, di quanti lati esser si vogliano, purchè sieno simili, concentrici e congiunti; e che alla conversion del maggiore s'intenda rigirarsi anco l'altro quanto si voglia minore; che intendeste, dico, le linee da essi passare prossimamente eguali, computando nello spazio passato dal minore gl' intervalli sotto gli archetti non tocchi da parte veruna del perimetro di esso minor poligono. Passa dunque il gran poligono di mille lati, e misura conseguentemente una linea retta eguale al suo ambito; e nell' istesso tempo il piccolo passa una prossimamente egual linea, ma interrottamente composta di mille particelle eguali a i suoi mille lati coll' interposizione di mille spazj vacui, che tali possiamo chiamargli in relazione alle mille lineette toccate da i lati del poligono. Ed il detto sin qui non ha veruna difficoltà o dubitazione. Ma ditemi, se intorno a un centro, qual sia, v. g. questo punto A, noi descriveremo due cerchi concentrici, ed insieme uniti, e che dai punti C, B dei lor semidiametri sieno tirate le tangenti C E, B F, e ad esse pel centro A la parallela A D, intendendo girato il cerchio maggiore sopra la linea B F (posta eguale alla di lui circonferenza, come parimente le altre

due CE, AD.) compita che abbia una revoluzione, che averà fatto il minor cerchio, e che il centro? questo sicuramente averà scorsa e toccata tutta la linea AD, e la circonferenza di quello averà con li suoi toccamenti misurata tutta la CE, facendo l'istesso che fecero i poligoni di sopra: in questo solamente differenti, che la linea HT non fu tocca in tutte le sue parti dal perimetro del minor poligono, ma ne furon lasciate tante intatte coll'interposizione di vacui saltati, quante furon le parti tocche dai lati; ma qui nei cerchi mai non si separa la circonferenza del minor cerchio dalla linea CE, sì che alcuna sua parte non venga tocca, nè mai quello che tocca della circonferenza, è manco del toccato nella retta. Or come dunque può senza salti scorrere il cerchio minore una linea tanto maggiore della sua circonferenza?

Sagr. Andava pensando, se si potesse dire, che siccome il centro del cerchio esso solo strascicato sopra AD la tocca tutta essendo anco un punto solo, così potessero i punti della circonferenza minore tirati dal moto della maggiore andare strascicandosi per qualche particella della linea CE.

Salv. Questo non può essere per due ragioni; prima perchè non sarebbe maggior ragione, che alcuno dei toccamenti simili al C andassero strascicando per qual-

che parte della linea C E, ed altri no: e quando questo fusse, essendo tali toccamenti (perchè son punti) infiniti, gli strascichi sopra la C E sarebbero infiniti, ed essendo quanti farebbero una linea infinita, ma la C E è finita. L'altra ragione è, che mutando il cerchio grande nella sua conversione continuamente contatto, non può non mutarlo parimente il minor cerchio, non si potendo da altro punto, che dal punto B tirare una linea retta sino al centro A, e che passasse pel punto C, sicchè mutando contatto la circonferenza grande, lo muta ancora la piccola, nè punto alcuno della piccola tocca più d'un punto della sua retta C E. Oltre che anco nella conversione dei poligoni nessun punto del perimetro del minore si adattava a più d'un punto della linea, che dal medesimo perimetro veniva misurata, come si può facilmente intendere, considerando la linea I K esser parallela alla B C, onde sin che la B C non si schiaccia sopra la B Q, la I K resta sollevata sopra la I P, nè prima la calca, se non nel medesimo istante che la B C si unisce colla B Q, ed allora tutta insieme la I K si unisce colla O P, e poi immediatamente se gli eleva sopra.

Sagr. Il negozio è veramente molto intrigato, nè a me sovviene scioglimento alcuno, però diteci quello che a noi conviene.

Salv. Io ricorrerei alla considerazione

dei poligoni sopra considerati, l'effetto dei quali è intelligibile, e di già compreso, e direi, che siccome nei poligoni di centomila lati alla linea passata, e misurata dal perimetro del maggiore, cioè, dai centomila suoi lati continuamente distesi, è eguale la misurata dai centomila lati del minore, ma coll' interposizione di centomila spazj vacui traposti; così direi nei cerchi (che son poligoni di lati infiniti) la linea passata dagl' infiniti lati del cerchio grande, continuamente disposti, esser pareggiata in lunghezza dalla linea passata dagl' infiniti lati del minore, ma da questi coll' interposizione d'altrettanti vacui tra essi; e siccome i lati non son quanti, ma bene infiniti, così gl' interposti vacui non son quanti, ma infiniti, quelli cioè infiniti punti tutti pieni, e questi infiniti punti parte pieni, e parte vacui. E qui voglio, che notiate come risolvendo, e dividendo una linea in parti quante, e per conseguenza numerate, non è possibile disporle in una estensione maggiore di quella che occupava mentre stavano continuate e congiunte, senza l'interposizione d'altrettanti spazj vacui, ma immaginandola risoluta in parti non quante, cioè ne' suoi infiniti indivisibili, la possiamo concepire distratta in immenso senza l' interposizione di spazj quanti vacui, ma sibbene d'infiniti indivisibili vacui. E questo, che si dice delle semplici linee, s'in-

tenderà detto delle superficie de' corpi solidi, considerandogli composti d'infiniti atomi non quanti; mentre gli vorremo dividere in parti quante, non è dubbio che non potremo disporle in ispazj più ampli del primo occupato dal solido, se non coll' interposizione di spazj quanti vacui, vacui dico almeno della materia del solido; ma se intenderemo l'altissima ed ultima resoluzione fatta nei primi componenti non quanti ed infiniti, potremo concepire tali componimenti distratti in ispazio immenso senza l'interposizione di spazj quanti vacui, ma solamente di vacui infiniti non quanti; ed in questa guisa non repugna distrarsi, v. g. un piccolo globetto d'oro in uno spazio grandissimo senza ammettere spazj quanti vacui: tuttavolta però che ammettiamo l'oro esser composto d'infiniti indivisibili.

Simp. Parmi che voi camminiate alla via di quei vacui disseminati di certo Filosofo antico.

Salv. Ma però voi non soggiugnete: il quale negava la provvidenza divina, come in certo simil proposito assai poco a proposito soggiunse un tale antagonista del nostro Accademico.

Simp. Vidi bene, e non senza stomaco, il livore del male affetto contraddittore; ma io non solamente per termine di buona creanza non toccherei simili tasti, ma perchè so quanto sono discordi dalla mente ben temperata e bene organiz-

ata di V. S. non solo religiosa e pia, ma cattolica e santa. Ma ritornando sul proposito, molte difficoltà sento nascermi dagli avuti discorsi, dalle quali veramente io non saprei liberarmi. E per una mi si para avanti questa, che se le circonferenze dei due cerchi sono eguali alle due rette C E, B F, questa continuamente presa, e quella coll' interposizione d'infiniti punti vacui, l'A D descritta dal centro, che è un punto solo, in qual maniera si potrà chiamare ad esso eguale contenendone infiniti? In oltre quel comporre la linea di punti, il divisibile di indivisibili, il quanto di non quanti, mi pajono scogli assai duri da passargli: e l'istesso dover ammettere il Vacuo tanto concludentemente riprovato da Aristotile non manca delle medesime difficoltà.

Salv. Ci sono veramente coteste, e dell' altre: ma ricordiamoci, che siamo tra gl' infiniti, e gl' indivisibili, quelli incomprensibili dal nostro intelletto finito per la loro grandezza, e questi per la lor piccolezza; contuttociò vediamo, che l'umano discorso non vuole rimanersi dall'aggirarsegli attorno, dal che pigliando io ancora qualche libertà produrrei alcuna mia fantasticheria se non concludente necessariamente, almeno per la novità apportatrice di qualche meraviglia: ma forse il divertir tanto lungamente dal cominciato cammino potrebbe parervi importuno, e però poco grato.

Sagr. Di grazia godiamo del benefizio, e privilegio, che s' ha dal parlar con i vivi, e tra gli amici, e più di cose arbitrarie, e non necessarie, differente dal trattar co' libri morti, li quali ti eccitano mille dubbj, e nessuno te ne risolvono. Fateci dunque partecipi di quelle considerazioni, che il corso dei nostri ragionamenti vi suggerisce, che non ci mancherà tempo, mercè dell' esser noi disobbligati da funzioni necessarie, di continuare, e risolvere l' altre materie intraprese, ed in particolare i dubbj toccati dal Sig. Simp. non si trapassino in tutti modi.

Salv. Così si faccia, poichè tale è il vostro gusto; e cominciando dal primo, che fu, come si possa mai capire, che un sol punto sia eguale ad una linea, vedendo di non ci poter fare altro per ora, proverò di quietare, o almeno temperare una improbabilità con un'altra simile, o maggiore, come talvolta una maraviglia si attutisce con un miracolo. E questo sarà col mostrarvi due superficie eguali, ed insieme due corpi pur eguali, e sopra le medesime dette superficie come basi loro collocati, andarsi continuamente, ed egualmente e queste e quelli nel medesimo tempo diminuendo, restando sempre tra di loro eguali i loro residui, e finalmente andare sì le superficie, come i solidi a terminare le lor perpetue egualità precedenti l' uno dei solidi coll' una delle su-

perficie in una lunghissima linea, e l'altro solido coll'altra superficie in un sol punto, cioè questi in un sol punto, e quelli in infiniti.

Sagr. Ammirabil proposta veramente mi par cotesta, però sentiamone l' esplicazione e la dimostrazione.

Salv. È necessario farne la figura, perchè la prova è pura Geometrica. Per tanto intendasi il mezzo cerchio A F B (fig. VI.) il cui centro C, ed intorno ad esso il parallelogrammo rettangolo A D E B, e dal centro ai punti D, E sieno tirate le rette linee C D, C E. Figurandoci poi il semidiametro C F perpendicolare a una delle due A B, D E immobile, intendiamo intorno a quello girarsi tutta questa figura. È manifesto, che dal rettangolo A D E B verrà descritto un cilindro, dal semicircolo A F B una mezza sfera, e dal triangolo C D E un cono. Inteso questo, voglio, che ci immaginiamo esser levato via l'Emisferio, lasciando però il cono, e quello che rimarrà del cilindro, il quale dalla figura, che riterrà simile a una scodella, chiameremo pure scodella; della quale, e del cono prima dimostreremo, che sono eguali; e poi un piano tirato parallelo al cerchio, che è base della scodella, il cui diametro è la linea D E, e il centro F, dimostreremo tal piano, che passasse, v. gr. per la linea G N, segando la scodella nei punti G I, O N, ed il

cono ne' punti H L, tagliare la parte del cono C H L eguale sempre alla parte della scodela, il cui profilo ci rappresentano i triangoli G A I, B O N, e di più si proverà la base ancora del medesimo cono, cioè il cerchio, il cui diametro H L, essere eguale a quella circolar superficie, che è base della parte della scodella, che è come se dicessimo un nastro di larghezza, quanta è la linea G I. (notate intanto, che cosa sono le diffinizioni dei Matematici, che sono una imposizion di nomi, o vogliam dire abbreviazioni di parlare, ordinate, ed introdotte per levar lo stento tedioso, che voi, ed io sentiamo di presente per non aver convenuto insieme di chiamar, v. gr. questa superficie nastro circolare, e quel solido acutissimo della scodella rasojo rotondo) Or comunque vi piaccia chiamargli bastivi intendere, che il piano prodotto per qualsivoglia distanza, pur che sia parallelo alla base, cioè al cerchio, il cui diametro D E taglia sempre i due solidi, cioè la parte del cono C H L, e la superior parte della scodella eguali tra di loro: e parimente le due superficie basi di tali solidi, cioè il detto nastro, e il cerchio H L pur tra loro eguali. Dal che ne segue la maraviglia accennata: cioè, che se intenderemo il segante piano successivamente innalzato verso la linea A B, sempre le parti dei solidi tagliate sono eguali, come anco le superficie, che son basi loro, pur sempre sono

eguali, e finalmente alzando, e alzando tanto li due solidi (sempre eguali) quanto le loro basi (superficie pur sempre eguali) vanno a terminare l'una coppia di loro in una circonferenza di un cerchio, e l'altra in un sol punto: che tali sono l'orlo supremo della scodella, e la cuspide del cono. Or mentre che nella diminuzione dei due solidi si va sino all'ultimo mantenendo sempre tra essi la egualità, ben par conveniente il dire, che gli altissimi, ed ultimi di tali menomamenti restino tra di loro eguali, e non l'uno infinitamente maggior dell'altro: par dunque, che la circonferenza di un cerchio immenso possa chiamarsi eguale a un sol punto. E questo che accade nei solidi, accade parimente nelle superficie basi loro, che esse ancora conservando nella comune diminuzione sempre la egualità vanno in fine ad incontrare nel momento della loro ultima diminuzione, quella per suo termine la circonferenza di un cerchio, e questa un sol punto. Li quali perchè non si debbon chiamare eguali, se sono le ultime reliquie, e vestigie lasciate da grandezze eguali? E notate appresso, che quando ben fussero tali vasi capaci degl'immensi Emisferi celesti, tanto gli orli loro supremi, e le punte dei contenuti coni, servando sempre tra loro l'egualità, andrebbero a terminare quelli in circonferenze eguali a quelle de' cerchi massimi degli Orbi celesti, e questi in semplici punti. Onde conforme

a quello, che tali specolazioni ne persuadono, anco tutte le circonferenze di cerchi quanto si voglia diseguali, posson chiamarsi tra loro eguali, e ciascheduna eguale a un punto solo.

Sagr. La speculazione mi par tanto gentile, e peregrina, che quando ben potessi, non me gli vorrei opporre, che mi parrebbe un mezzo sacrilegio lacerar sì bella struttura calpestandola con qualche pedantesco affronto; però per intera soddisfazione recateci pur la prova, che dite Geometrica del mantenersi sempre l'egualità tra quei solidi, e quelle basi loro, che penso, che non possa esser se non molto arguta, essendo così sottile la filosofica meditazione, che da tal conclusione dipende.

Salv. La dimostrazione è anco breve, e facile. Ripigliamo la segnata figura, nella quale per esser l'angolo I P C retto, il quadrato del semidiametro I C è eguale alli due quadrati dei lati I P, P C. Ma il semidiametro I C è eguale alla A C, e questa alla G P, e la C P è eguale alla P H; adunque il quadrato della linea G P è eguale alli due quadrati delle I P, P H, e il quadruplo ai quadrupli; cioè il quadrato del diametro G N è eguale alli due quadrati I O, H L; e perchè i cerchi son tra loro, come i quadrati dei loro diametri, il cerchio, il cui diametro G N sarà eguale alli due cerchi, i cui dia-

metri I O, H L, e tolto via il comune cerchio, il cui diametro I O, il residuo del cerchio G N sarà eguale al cerchio, il cui diametro è H L.. E questo è quanto alla prima parte. Quanto poi all' altra parte, lasceremo per ora la dimostrazione, sì perchè volendola noi vedere la troveremo nella duodecima Proposizione del libro secondo *de centro gravitatis solidorum* posta dal Sig. Luca Valerio nuovo Archimede dell' età nostra, il quale per un altro suo proposito se ne servì; sì perchè nel caso nostro basta l' aver veduto, come le superficie già dichiarate sieno sempre eguali; e che diminuendosi sempre egualmente vadano a terminare l' una in un sol punto, e l' altra nella circonferenza di un cerchio maggiore anco di qualsivoglia grandissimo, perchè in questa conseguenza sola versa la nostra maraviglia.

Sagr. Ingegnosa la dimostrazione, quanto mirabile la riflessione fattavi sopra. Or sentiamo qualche cosa circa l'altra difficoltà promossa dal Sig. Simp. se però avete alcuna particolarità da dirvi sopra, che crederei, che non potesse essere, essendo una controversia stata tanto esagitata.

Salv. Avrò qualche mio pensiero particolare, replicando prima quel, che poco fa dissi, cioè che l' infinito è per se solo da noi incomprensibile, come anco gl' indivisibili: or pensate quello, che saranno congiunti insieme: e pur se voglia-

mo compor la linea di punti indivisibili, bisogna fargli infiniti; e così conviene apprender nel medesimo tempo l'infinito, e l'indivisibile. Le cose, che in più volte mi son passate per la mente in tal proposito, son molte, parte delle quali e forse le più considerabili potrebbe esser, che così improvvisamente non mi sovvenissero, ma nel progresso del ragionamento potrà accadere, che destando io a voi, ed in particolare al Sig. Simplicio obbiezioni, e difficoltà, essi all'incontro mi facessero ricordar di quello che senza tale eccitamento restasse dormendo nella fantasia; e però colla solita libertà sia lecito produrre in mezzo i nostri umani capricci, che tali meritamente possiamo nominargli in comparazione delle dottrine soprannaturali, sole vere, e sicure determinatrici delle nostre controversie, e scorte inerranti nei nostri oscuri, e dubbj sentieri, o più tosto laberinti.

Tra le prime istanze, che si sogliono produrre contro a quelli, che compongono il continuo d'indivisibili, suole esser quella, che uno indivisibile aggiunto a un altro indivisibile non produce cosa divisibile; perchè se ciò fosse, ne seguirebbe, che anco l'indivisibile fosse divisibile, perchè quando due indivisibili, come per esempio due punti, congiunti facessero una quantità, qual sarebbe una linea divisibile, molto più sarebbe tale una composta di tre,

di cinque, di sette, e di altre moltitudini dispari; le quali linee essendo più segabili in due parti eguali, rendon segabile quell'indivisibile, che nel mezzo era collocato. In questa, ed altre obbiezioni di questo genere si dà soddisfazione alla parte con dirgli, che non solamente due indivisibili, ma nè dieci, nè cento, nè mille non compongono una grandezza divisibile, e quanta, ma sibbene infiniti. . . .

Simpl. Qui nasce subito il dubbio, che mi pare insolubile; ed è, che sendo noi sicuri trovarsi linee una maggior dell'altra, tuttavolta che amendue contengano punti infiniti, bisogna confessare trovarsi nel medesimo genere una cosa maggior dell'infinito; perchè la infinità dei punti della linea maggiore eccederà l'infinità dei punti della minore. Ora questo darsi un infinito maggior dell'infinito, mi par concetto da non potere esser capito in verun modo.

Salv. Queste son di quelle difficoltà, che derivano dal discorrer, che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agli infiniti, dandogli quegli attributi, che noi diamo alle cose finite, e terminate; il che penso, che sia inconveniente, perchè stimo, che questi attributi di maggioranze, minorità, ed egualità non convengano agl'infiniti, dei quali non si può dire uno esser maggiore, o minore, o eguale all'altro. Per prova di che già mi sovvenne un

sì fatto discorso, il quale per più chiara esplicazione proporrò per interrogazioni al Sig. Simplicio che ha mossa la difficoltà.

Io suppongo, che voi benissimo sappiate, quali sono i numeri quadrati, e quali i non quadrati.

Simpl. So benissimo, che il numero quadrato è quello, che nasce dalla moltiplicazione di un altro numero in se medesimo, e così il quattro, il nove son numeri quadrati, nascendo quello dal dua, e questo dal tre in se medesimi moltiplicati.

Salv. Benissimo; e sapete ancora, che siccome i prodotti si dimandano quadrati, i producenti, cioè quelli, che si multiplicano, si chiamano lati, o radici; gli altri poi, che non nascono da numeri multiplicati in se stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati, e i non quadrati esser più, che i quadrati soli, dirò proposizione verissima; non è così?

Simpl. Non si può dir altrimenti.

Salv. Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti, quante sono le proprie radici, avvengachè ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice ha il suo quadrato, nè quadrato alcuno ha più di una sola radice, nè radice alcuna più di un quadrato solo.

Simp. Così sta.

Salv. Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare, che elle non siano quante tutti i numeri, poichè non vi è numero alcuno, che non sia radice di qualche quadrato. E stante questo converrà dire, che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poichè tanti sono, quante le lor radici, e radici son tutti i numeri; e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più, che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati. E pur tuttavia si va la moltitudine dei quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto a maggiori numeri si trapassa; perchè sino a cento vi sono dieci quadrati, che è quanto a dire, la decima parte esser quadrati: in dieci mila solo la centesima parte son quadrati, in un milione solo la millesima: e pur nel numero infinito, se concepire potessimo, bisognerebbe dire tanti essere i quadrati, quanti tutti i numeri insieme.

Sagr. Che dunque si ha da determinare in questa occasione?

Salv. Io non vedo, che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici; nè la moltitudine dei quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, nè questa maggior di quella; ed in ultima conclusione gli attributi di eguale, maggiore, e minore

non aver luogo negl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate. E però quando il Signor Simplicio mi propone più linee diseguali, e mi domanda come possa essere, che nelle maggiori non siano più punti, che nelle minori, io gli rispondo, che non ve ne sono nè più, nè manco, nè altrettanti; ma in ciascheduna infiniti. O veramente se io gli rispondessi i punti nell' una esser quanti sono i numeri quadrati; in un' altra maggiore, quanti tutti i numeri; in quella piccolina, quanti sono i numeri cubi, non potrei io avergli dato soddisfazione col porre più in una, che nell' altra, e pure in ciascheduna infiniti? e questo è quanto alla prima difficoltà.

Sagr. Fermate in grazia, e concedetemi, che io aggiunga al detto fin qui un pensiero, che pur ora mi giugne; e questo è, che stante le cose dette sin qui parmi, che non solamente non si possa dire un infinito esser maggiore a un altro infinito, ma nè anco, che ei sia maggior di un finito, perchè se il numero infinito fosse maggiore, v. gr. del milione, ne seguirebbe, che passando dal milione ad altri ed altri continuamente maggiori, si camminasse verso l' infinito; il che non è: anzi per l' opposito a quanto maggiori numeri facciamo passaggio, tanto più ci discostiamo dal numero infinito; perchè nei numeri, quanto più si pigliano grandi, sempre più e più rari sono i nu-

meri quadrati in essi contènuti: ma nel numero infinito i quadrati non possono esser manco, che tutti i numeri, come pure ora si è concluso: adunque l'andare verso numeri sempre maggiori e maggiori è un discostarsi dal numero infinito.

Salv. E così dal vostro ingegnoso discorso si conclude gli attributi di maggiore, minore, o eguale non aver luogo non solamente tra gl'infiniti, ma nè anco tra gl'infiniti, e i finiti.

Passo ora ad un'altra considerazione, ed è, che stante che la linea, ed ogni continuo sian divisibili in sempre divisibili, non vedo come si possa sfuggire, la composizione essere d'infiniti indivisibili, perchè una divisione, e suddivisione, che si possa proseguir perpetuamente, suppone, che le parti sieno infinite, perchè altramente la suddivisione sarebbe terminabile; e l'esser le parti infinite si tira in conseguenza l'esser non quante; perchè quanti infiniti fanno un'estensione infinita; e così abbiamo il continuo composto d'infiniti indivisibili.

Simpl. Ma se noi possiamo proseguir sempre la divisione in parti quante, che necessità abbiamo noi di dover per tal rispetto introdur le non quante?

Salv. L'istesso poter proseguir perpetuamente la divisione in parti quante, induce la necessità della composizione d'infiniti non quanti. Imperocchè venendo più

alle strette io vi domando, che risolutamente mi diciate, se le parti quante nel continuo per vostro credere son finite, o infinite?

Simpl. Io vi rispondo esser infinite, e finite: infinite in potenza, e finite in atto. Infinite in potenza, cioè innanzi alla divisione; ma finite in atto, cioè dopo che son divise, perchè le parti non s'intendono attualmente esser nel suo tutto, se non dopo esser divise, o almeno segnate; altramente si dicono esservi in potenza.

Salv. Sicchè una linea lunga, v. g. venti palmi, non si dice contener venti linee di un palmo l'una attualmente, se non dopo la divisione in venti parti eguali, ma per avanti si dice contenerle solamente in potenza. Or sia come vi piace, ditemi, se fatta l'attual divisione di tali parti quel primo tutto cresce, o diminuisce, o pur resta della medesima grandezza?

Simpl. Non cresce, nè scema.

Salv. Così credo io ancora. Adunque le parti quante nel continuo o vi sieno in atto, o vi sieno in potenza, non fanno la sua quantità maggiore, nè minore; ma chiara cosa è, che parti quante attualmente contenute nel loro tutto, se son infinite, lo fanno di grandezza infinita; adunque parti quante benchè in potenza solamente infinite, non possono esser contenute, se non in una grandezza infinita; adunque nella finita parti quante infinite

nè in atto, nè in potenza possono esser contenute.

Sagr. Come dunque potrà esser vero, che il continuo possa incessabilmente dividersi in parti capaci sempre di nuova divisione?

Salv. Par che quella distinzione d'atto, e di potenza vi renda fattibile per un verso quel, che per un altro sarebbe impossibile. Ma io vedrò d'aggiustar meglio queste partite con fare un altro computo. Ed al quesito, che domanda, se le parti quante nel continuo terminato sien finite, o infinite, risponderò tutto l'opposito di quel, che rispose dianzi il Sig. Simplicio, cioè non esser nè finite, nè infinite.

Simp. Ciò non avrei saputo mai rispondere io, non pensando, che si trovasse termine alcuno mezzano tra il finito, e l'infinito; sicchè la divisione, o distinzione, che pone una cosa o esser finita, o infinita, fosse manchevole e difettosa.

Salv. A me par, ch'ella sia. E parlando delle quantità discrete, parmi che tra le finite, e l'infinite vi sia un terzo medio termine, che è il rispondere ad ogni segnato numero; sicchè domandato nel presente proposito, se le parti quante nel continuo sieno finite, o infinite, la più congrua risposta sia il dire non essere nè finite, nè infinite, ma tante, che rispondono ad ogni segnato numero; per

lo che fare è necessario, che elle non sieno comprese dentro a un limitato numero, perchè non risponderebbono ad un maggiore: ma nè anco è necessario, che elle sieno infinite, perchè niuno assegnato numero è infinito. E così ad arbitrio del domandante una proposta linea gliela potremo assegnare in cento parti quante, e in mille, e in cento mila, conforme a qual numero gli piacerà; ma divisa in infinite, questo non già. Concedo dunque ai Signori Filosofi, che il continuo contiene quante parti quante piace loro, e gli ammetto, che le contenga in atto, o in potenza a lor gusto, e beneplacito; ma gli soggiungo poi, che nel modo che in una linea di dieci canne si contengono dieci linee d'una canna l'una, e quaranta d'un braccio l'una, e ottanta di mezzo braccio, così contiene ella punti infiniti; chiamategli poi in atto, o in potenza, come più vi piace, che io, Sig. Simplicio, in questo particolare mi rimetto al vostro arbitrio, e giudizio.

Simp. Io non posso non laudare il vostro discorso: ma ho gran paura, che questa parità dell'esser contenuti i punti, come le parti quante, non corra con intera puntualità; nè che a voi sarà così agevole il dividere la proposta linea in infiniti punti, come a quei Filosofi in dieci canne, o in quaranta braccia: anzi ho per impossibile del tutto il ridurre ad ef-

fetto tal divisione; sicchè questa sarà una di quelle potenze, che mai non si riducono in atto.

Salv. Il non essere una cosa fattibile, se non con fatica, o diligenza, o in gran lunghezza di tempo, non la rende impossibile, perchè penso, che voi altresì non così agevolmente vi sbrigherete da una divisione da farsi d'una linea in mille parti, e molto meno dovendo dividerla in 937 o altro gran numero primo. Ma se questa, che voi per avventura stimate divisione impossibile, io ve la riducessi a così spedita, come se altri la dovesse segare in quaranta, vi contentereste voi di ammetterla più placidamente nella nostra conversazione?

Simp. Io gusto del vostro trattar, come fate talora, con qualche piacevolezza; ed al quesito vi rispondo, che la facilità mi parrebbe grande più che a bastanza, quando il risolverla in punti non fosse più laborioso, che il dividerla in mille parti.

Salv. Qui voglio dirvi cosa, che forse vi farà maravigliare in proposito del volere, o poter risolver la linea ne' suoi infiniti, tenendo quell' ordine, che altri tiene nel dividerla in quaranta, sessanta, o cento parti, cioè coll' andarla dividendo in due, e poi in quattro, col qual ordine chi credesse di trovare i suoi infiniti punti, s' ingannerebbe indigrosso, perchè con tal progresso nè men alla division di

tutte le parti quante si perverrebbe in eterno; ma degli indivisibili tanto è lontano il poter giugner per cotale strada al cercato termine, che più tosto altri se ne discosta, e mentre pensa col continuar la divisione, e col moltiplicar la moltitudine delle parti, di avvicinarsi alla infinità, credo, che sempre più se n' allontani: e la mia ragione è questa. Nel discorso avuto poco fa concludemmo, che nel numero infinito bisognava, che tanti fossero i quadrati, o i cubi, quanti tutt' i numeri, poichè e questi, e quelli tanti sono, quante le radici loro, e radici son tutt' i numeri Vedemmo appresso, che quanto maggiori numeri si pigliavano, tanto più radi si trovavano in essi i lor quadrati, e più radi ancora i lor cubi: adunque è manifesto, che a quanto maggiori numeri noi trapassiamo, tanto più ci discostiamo dal numero infinito; dal che ne seguita, che tornando indietro (poichè tal progresso sempre più ci allontana dal termine ricercato) se numero alcuno può dirsi infinito, questo sia l' unità. E veramente in essa son quelle condizioni, e necessarj requisiti del numero infinito, dico, del contener in se tanti quadrati, quanti cubi, e quanti tutti i numeri.

Simp. Io non capisco bene, come si debba intendere questo negozio.

Salv. Il negozio non ha in se dubbio veruno, perchè l' unità è quadrato, è

cubo, è quadrato quadrato, e tutte le altre dignità; nè vi è particolarità veruna essenziale ai quadrati, ai cubi, che non convenga all' uno; come, v. g. proprietà di due numeri quadrati è l' aver tra di loro un numero medio proporzionale. Pigliate qualsivoglia numero quadrato per l' uno de' termini, e per l' altro l' unità, sempre ci troverete un numero medio proporzionale. Sieno due numeri quadrati 9 e 4 eccovi tra 'l 9 e l' uno, medio proporzionale il 3, fra 'l 4 e l' uno media il 2, e tra i due quadrati 9 e 4 vi è il 6 in mezzo. Proprietà dei cubi è l' esser tra essi necessariamente due numeri medii proporzionali. Ponete 8 e 27, già tra loro son medi 12 e 18, e tra l' uno, e l' 8 mediano il 2 e 'l 4, tra l' uno e 'l 27 il 3 e 'l 9. Concludiamo per tanto non ci esser altro numero infinito, che l' unità. E queste sono delle maraviglie, che superano la capacità della nostra immaginazione, e che doveriano farci accorti, quanto gravemente si erri, mentre altri voglia discorrere intorno agl' infiniti con quei medesimi attributi, che noi usiamo intorno ai finiti, le nature dei quali non hanno veruna convenienza tra di loro. In proposito di che non voglio tacervi un mirabile accidente, che pur ora mi sovviene, esplicante l' infinita differenza, anzi repugnanza, e contrarietà di natura, che incontrerebbe una quantità terminata nel trapassa-

re all' infinito. Segniamo questa linea retta A B (Fig. VII.) di qualsivoglia lunghezza; e preso in lei qualsivoglia punto C, che in parti diseguali la divida: dico, che partendosi coppie di linee dai termini A, B, che ritenendo fra di loro la medesima proporzione, che hanno le parti A C, B C, vadano a concorrere insieme i punti dei loro concorsi andranno tutti nella circonferenza di un medesimo cerchio: come per esempio partendosi le A L, B L dai punti A, B, ed avendo tra di loro la medesima proporzione, che hanno le parti A C, B C, e andando a concorrere nel punto L, e ritenendo l' istessa proporzione altre due A K, B K, concorrendo in K altre, A I, B I, A H, H B, A G, G B, A F, F B, A E, E B, dico, che i punti dei concorsi C, L, K, I, H, G, F, E cascano tutti nella circonferenza di un istesso cerchio, talchè se ci immagineremo il punto C muoversi continuamente con tal legge, che le linee da esso prodotte sino ai termini fissi A B mantengano sempre la proporzione medesima, che hanno le prime parti A C, C B, tal punto C descriverà la circonferenza di un cerchio, come appresso vi dimostrerò. Ed il cerchio in cotal modo descritto sarà sempre maggiore e maggiore infinitamente, secondo che il punto C sarà preso più vicino al punto di mezzo, che sia O, e minore sarà quel cerchio, che dal punto più vicino

all' estremità B sarà descritto; in maniera che dai punti infiniti, che pigliar si possono nella linea O B, si descriveranno cerchi (movendogli coll' esplicata legge) di qualsivoglia grandezza, minori della luce dell' occhio di una pulce, e maggiori dell' Equinoziale del primo Mobile. Ora se alzandosi qualsivoglia dei punti compresi tra i termini O, B da tutti si descrivono cerchi, e immensi dai punti prossimi all'O, alzando l' istesso O, e continuando di muoverlo coll' osservanza dell' istesso decreto, cioè, che le linee da esso prodotte sino ai termini A, B ritengano la proporzione, che hanno le prime linee A O, O B, che linea verrà segnata? Segnerassi la circonferenza di un cerchio, ma di un cerchio maggiore di tutti gli altri massimi, di un cerchio dunque infinito; ma si segna anco una linea retta, e perpendicolare sopra la B A eretta dal punto O, e prodotta in infinito senza mai tornare a riunire il suo termine ultimo col suo primo, come ben tornavano l' altre; imperocchè la segnata per lo moto limitato del punto C dopo segnato il mezzo cerchio superiore C H E, continuava di segnare l' inferiore E M C riunendo insieme i suoi estremi termini nel punto C. Ma il punto O mossosi per segnar, come tutti gli altri della linea A B (perchè i punti presi nell' altra parte O A descriveranno essi ancora lor cerchi, ed i massimi i punti prossimi

all' O) il suo cerchio per farlo massimo di tutti, e per conseguenza infinito, non può più ritornare nel suo primo termine, ed in somma descrive una linea retta infinita per circonferenza del suo infinito cerchio. Considerate ora qual differenza sia da un cerchio finito a un infinito, poichè questo muta talmente l'essere, che totalmente perde l'essere, e il potere essere; che già ben chiaramente comprendiamo non si poter dare un cerchio infinito; il che si tira poi in conseguenza nè meno potere essere una sfera infinita, nè altro qualsivoglia corpo, o superficie figurata, e infinita. Or che diremo di cotali metamorfosi nel passar dal finito all'infinito? E perchè dobbiamo sentir repugnanza maggiore, mentre cercando l'infinito nei numeri andiamo a concluderlo nell'uno? E mentre che rompendo un solido in molte parti, e seguitando di ridurlo in minutissima polvere, risoluto che si fosse negl' infiniti suoi atomi non più divisibili, perchè non potremo dire quello esser ritornato in un sol continuo, ma forse fluido, come l'acqua, o il mercurio, o il medesimo metallo liquefatto? E non vediamo noi le pietre liquefarsi in vetro, ed il vetro medesimo col molto fuoco farsi fluido più che l'acqua?

Sagr. Dobbiamo dunque credere, i fluidi esser tali, perchè sono risoluti nei primi infiniti indivisibili suoi componenti?

Salv. Io non so trovar miglior ripiego per risolvere alcune sensate apparenze, tra le quali una è questa. Mentre io piglio un corpo duro, ossia pietra, o metallo, e che con un martello, o sottilissima lima lo vo al possibile dividendo in minutissima, ed impalpabile polvere, chiara cosa è, che i suoi minimi, ancorchè per la lor piccolezza sieno impercettibili a uno a uno dalla nostra vista, e dal tatto: tuttavia sono eglino ancor quanti, figurati, e numerabili; e di essi accade, che accumulati insieme si sostengono ammucchiati; e scavati sino a certo segno, resta la cavità, senza che le parti d' intorno scorrano a riempirla; agitati, e commossi subito si fermano, tantosto che il motore esterno gli abbandona. E questi medesimi effetti fanno ancora tutti gli aggregati di corpusculi maggiori e maggiori, e di ogni figura, ancorchè sferica, come vediamo nei monti di miglio, di grano, di migliarole di piombo, e di ogni altra materia. Ma se noi tenteremo di vedere tali accidenti nell' acqua, nessuno ve ne troveremo, ma sollevata immediatamente si spiana, se da vaso, o altro esterno ritegno non sia sostenuta; incavata subito scorre a riempier la cavità, ed agitata per lunghissimo tempo va fluttuando, e per ispazj grandissimi distendendo le sue onde. Da questo mi par di potere molto ragionevolmente arguire, i minimi dell' acqua,

nei quali ella pur sembra esser risoluta (poichè ha minor consistenza di qualsivoglia sottilissima polvere, anzi non ha consistenza nessuna) esser differentissimi dai minimi quanti, e divisibili; nè saprei ritrovarvi altra differenza, che l' essere indivisibili. Parmi anco, che la sua esquisitissima trasparenza ce ne porga assai ferma conghiettura; perchè se noi piglieremo del più trasparente cristallo che sia, e lo comincieremo a rompere, e pestare, ridotto in polvere perde la trasparenza, e sempre più, quanto più sottilmente si trita; ma l' acqua, che pur è sommamente trita, è anco sommamente diafana. L' oro, e l' argento con acque forti polverizzati più sottilmente, che con qualsivoglia lima, pur restano in polvere, ma non divengon fluidi: nè prima si liquefanno, che gl' indivisibili del fuoco, o dei raggi del Sole gli dissolvano, credo, nei loro primi altissimi componenti infiniti, indivisibili.

Salv. Questo, che V. S. ha toccato della luce, ho io più volte veduto con maraviglia, veduto dico, con uno specchio concavo di tre palmi di diametro liquefare il piombo in un istante; onde io son venuto in opinione, che quando lo specchio fosse grandissimo, e ben terso, e di figura parabolica, liquefarebbe non meno ogni altro metallo in brevissimo tempo, vedendo, che quello nè molto grande, nè ben lustro, e di cavità sferica

con tanta forza liquefaceva il piombo, ed abbruciava ogni materia combustibile: effetti, che mi rendon credibili le maraviglie degli specchi di Archimede.

Salv. Intorno agli effetti degli specchi di Archimede mi rende credibile ogni miracolo, che si legge in più Scrittori, la lettura dei libri dell' istesso Archimede già da me con infinito stupore letti, e studiati: e se nulla di dubbio mi fosse restato, quello, che ultimamente ha dato in luce intorno allo Specchio Ustorio il P. Bonaventura Cavaleri, e che io con ammirazione ho letto, è bastato a levarmi ogni difficoltà.

Sagr. Vidi ancor io cotesto trattato, e con gusto, e maraviglia grande lo lessi, e perchè per avanti aveva conoscenza della persona, mi andai confermando nel concetto, che di esso aveva già preso, che ei fosse per riuscire uno de' principali Matematici dell' età nostra. Ma tornando all' effetto maraviglioso dei raggi Solari nel liquefare i metalli, dobbiamo noi credere, che tale, e sì veemente operazione sia senza moto, o pur che sia col moto, ma velocissimo?

Salv. Gli altri incendj, e dissoluzioni veggiamo noi farsi con moto, e con moto velocissimo. Vedansi le operazioni dei fulmini, della polvere nelle mine, e nei petardi, ed in somma quanto il velocitar coi mantici la fiamma dei carboni,

mista con i vapori grossi, e non puri, accresca di forza nel liquefare i metalli: onde io non saprei intendere, che l'azione della luce, benchè purissima potesse esser senza moto, ed anco velocissimo.

Sagr. Ma quale, e quanta dobbiamo noi stimare, che sia questa velocità del lume? forse istantanea, momentanea, o pur come gli altri movimenti temporanea? ne potremo con esperienza assicurare quale ella sia?

Simp. Mostra l'esperienza quotidiana l'espansion del lume esser istantanea; mentre che vedendo in gran lontananza sparar un' Artiglieria, lo splendor della fiamma senza interposizion di tempo si conduce agli occhi nostri, ma non già il suono all' orecchie, se non dopo notabile intervallo di tempo.

Sagr. Eh Sig. Simplicio, da cotesta notissima esperienza non si raccoglie altro, se non che il suono si conduce al nostro udito in tempo men breve di quello, che si conduca il lume; ma non mi assicura, se la venuta del lume sia perciò istantanea più che temporanea, ma velocissima. Nè simile osservazione conclude più, che l'altra di chi dice: subito giunto il Sole all' orizzonte arriva il suo splendore agli occhi nostri; imperocchè chi mi assicura, che prima non giugnessero i suoi raggi al detto termine, che alla nostra vista?

Salv. La poca concludenza di queste, e di altre simili osservazioni mi fece una volta pensare a qualche modo di poterci senza errore accertare, se l'illuminazione, cioè se l'espansion del lume fosse veramente istantanea: poichè il moto assai veloce del suono ci assicura, quella della luce non poter esser se non velocissima. E l'esperienza, che mi sovvenne, fu tale. Voglio, che due piglino un lume per uno, il quale tenendolo dentro lanterna, o altro ricetto, possano andar coprendo, e scoprendo coll' interposizion della mano alla vista del compagno; e che ponendosi l'uno incontro all'altro in distanza di poche braccia vadano addestrandosi nello scoprire, ed occultare il lor lume alla vista del compagno: sicchè quando l'uno vede il lume dell'altro, immediatamente scuopra il suo; la qual corrispondenza dopo alcune risposte fattesi scambievolmente verrà loro talmente aggiustata, che senza sensibile svario alla scoperta dell'uno risponderà immediatamente la scoperta dell'altro, sicchè quando l'uno scuopre il suo lume, vedrà nell'istesso tempo comparire alla sua vista il lume dell'altro. Aggiustata cotal pratica in questa piccolissima distanza pongansi i due medesimi compagni con due simili lumi in lontananza di due, o tre miglia; e tornando di notte a far l'istessa esperienza, vadano osservando attentamente, se le risposte delle loro sco-

perte, e occultazioni seguono secondo l'istesso tenore, che facevano da vicino; che seguendo si potrà assai sicuramente concludere, l'espansion del lume essere instantanea; che quando ella ricercasse tempo, in una lontananza di tre miglia, che importano sei, per l'andata d'un lume, e venuta dall'altro, la dimora dovrebbe essere assai osservabile. E quando si volesse far tale osservazione in distanze maggiori, cioè di otto o dieci miglia, potremo servirci del Telescopio, aggiustandone uno per uno gli osservatori al luogo, dove la notte si hanno a mettere in pratica i lumi, li quali ancorchè non molto grandi, e perciò invisibili in tanta lontananza all' occhio libero, ma ben facili a coprirsi, e scoprirsi, coll'ajuto dei Telescopj già aggiustati, e fermati potranno essere comodamente veduti.

Sagr. L'esperienza mi pare d'invenzion non men sicura che ingegnosa, ma diteci quello che nel praticarla avete concluso.

Salv. Veramente non l'ho sperimentata, salvo che in lontananza piccola, cioè manco d'un miglio, dal che non ho potuto assicurarmi se veramente la comparsa del lume opposto sia istantanea; ma ben, se non instantanea, velocissima, e direi momentanea è ella, e per ora l'assimiglierei a quel moto che vediamo farsi dallo splendore del baleno veduto tra le nugole lontane otto o dieci miglia, del qual lume

distinguiamo il principio, e dirò il capo e fonte in un luogo particolare tra esse nugole; ma ben immediatamente segue la sua espansione amplissima per le altre circostanti, che mi pare argomento quella farsi con qualche poco di tempo; perchè quando l'illuminazione fusse fatta tutta insieme e non per parti, non par che si potesse distinguere la sua origine, e dirò il suo centro dalle sue falde e dilatazioni estreme. Ma in quai pelaghi ci andiamo noi inavvertentemente pian piano ingolfando? tra i vacui, tra gl' infiniti, tra gli indivisibili, tra i movimenti instantanei, per non poter mai dopo mille discorsi giugnere a riva?

Sagr. Cose veramente molto sproporzionate al nostro intendimento. Ecco l'infinito cercato tra i numeri, par che vada a terminar nell' unità: dagl'indivisibili nasce il sempre divisibile: il vacuo non par che risegga se non indivisibilmente mescolato tra 'l pieno; ed in somma in queste cose si muta talmente la natura delle comunemente intese da noi, che sin alla circonferenza d'un cerchio diventa una linea retta infinita, che s'io ho ben tenuto a memoria, è quella Proposizione, che voi Sig. Salv. dovevate con geometrica dimostrazione far manifesta. Però quando vi piaccia, sarà bene senza più digredire arrecarcela.

Salv. Eccomi a servirle, dimostrando

per piena intelligenza il seguente Problema: Data una linea retta divisa secondo qualsivoglia proporzione in parti diseguali, descrivere un cerchio, alla cui circonferenza, prodotte a qualsivoglia punto di essa due linee rette dai termini della data linea ritengano la proporzion medesima che hanno tra di loro le parti di essa linea data; sicchè omologhe siano quelle che si partano dai medesimi termini.

Sia la data retta linea A B, divisa in qualsivoglia modo in parti diseguali nel punto C, bisogna descrivere il cerchio, a qualsivoglia punto della cui circonferenza concorrendo due rette prodotte dai termini A, B, abbiano tra di loro la proporzion medesima che hanno tra di loro le parti A C, B C (Fig. VIII.), sicchè omologhe sian quelle che si partono dall' istesso termine. Sopra 'l centro C coll' intervallo della minor parte C B intendasi descritto un cerchio, alla circonferenza del quale venga tangente dal punto A la retta A D indeterminatamente prolungata verso E, e sia il contatto in D, e congiungasi la C D, che sarà perpendicolare alla A E, ed alla B A sia perpendicolare la B E, la quale prodotta concorrerà colla A E, essendo l'angolo A acuto: sia il concorso in E, di dove si ecciti la perpendicolare alla A E, che prodotta vada a concorrere con la A B infinitamente prolungata in F. Dico primieramente le due rette F E, F C esser

eguali; imperocchè tirata la E C, avremo nei due triangoli D E C, B E C li due lati dell' uno D E, E C eguali alli due dell' altro B E, E C, essendo le due D E, E B tangenti del cerchio D B, e le basi D C, C B parimente eguali: onde li due angoli D E C, B E C saranno eguali. E perchè all' angolo B C E per esser retto manca quanto è l'angolo C E B, ed all' angolo C E F pur per esser retto manca quanto è l'angolo C E D, essendo tali mancamenti eguali C, gli angoli F E, F E C saranno eguali, ed in conseguenza i lati F E, F C; onde fatto centro il punto F, e coll' intervallo F E descrivendo un cerchio passerà pel punto C. Descrivasi, e sia C E G. Dico questo essere il cerchio ricercato, a qualsivoglia punto della circonferenza del quale ogni coppia di linee che vi concorrano, partendosi dai termini, A, B, avranno la medesima proporzione tra di loro, che hanno le due parti A C, B C, le quali di già vi concorrono nel punto C. Questo delle due che concorrono nel punto E, cioè delle A E, B E, è manifesto; essendo l'angolo E del triangolo A E B diviso in mezzo dalla C E, per lo che qual proporzione ha la A C alla C B, tale ha la A E alla B E. L' istesso proveremo delle due A G, B G terminate nel punto G. Imperocchè essendo (per la similitudine de' triangoli A F E, E F B) come A F ad F E, così E F ad F B, cioè come A F ad F C, così C F ad F B,

sarà dividendo come A C, C F (cioè ad F G) così C B a B F, e tutta A B a tutta B G, come una C B ad una B F; e componendo come A G a G B, così C F ad F B, cioè E F ad F B, cioè A E ad E B, ed A C a C B, il che bisognava provare. Prendasi ora qualsivoglia altro punto nella circonferenza, e sia H al quale concorrano le due A H, B H. Dico parimente come A C a C B, così essere A H ad H B. Prolunghisi H B sino alla circonferenza in I, e congiungasi I F. E perchè già si è visto come A B a B G, così essere C B a B F, sarà il rettangolo A B F eguale al rettangolo C B G, e sono gli angoli al B eguali, adunque A H ad H B sta, come I F, cioè E F ad F B ed A E ad E B.

Dico oltre a ciò, che è impossibile, che le linee che abbiano tal proporzione partendosi dai termini A, B, concorrano a verun punto, o dentro, o fuori del cerchio C E G. Imperocchè, se è possibile, concorrano due tali linee al punto L posto fuori, e siano le A L, B L, e prolunghisi la L B sino alla circonferenza in M, e congiungasi M F. Se dunque la A L alla B L è come la A C alla B C, cioè come la M F alla F B, avremo due triangoli A L B, M F B, li quali intorno alli due angoli A L B, M F B hanno i lati proporzionali, gli angoli alla cima nel punto B eguali, e li due rimanenti F M B, L A B minori che retti. (Imperocchè l'angolo

retto al punto M ha per base tutto il diametro C G, e non la sola parte B F, e l'altro al punto A è acuto, perchè la linea A L omologa della A C è maggiore della B L omologa della B C). Adunque i triangoli A B L, M B F son simili: e però come A B a B L, così M B a B F, onde il rettangolo A B F sarà eguale al rettangolo M B L; ma il rettangolo A B F s'è dimostrato eguale al C B G; adunque il rettangolo M B L è eguale al rettangolo C B G, il che è impossibile; adunque il concorso non può cader fuor del cerchio. E nel medesimo modo si dimostrerà non poter cader dentro; adunque tutt' i concorsi cascano nella circonferenza stessa.

Ma è tempo che torniamo a dar soddisfazione al desiderio del Sig. Simplicio, mostrandogli come il risolver la linea nei suoi infiniti punti non è non solamente impossibile, ma nè meno ha in se maggior difficoltà, che 'l distinguere le sue parti quante, fatto però un supposto, il quale penso, Sig. Simpl. che non siate per negarmi; e questo è, che non mi ricercherete, che io vi separi i punti l'uno dall'altro, e ve gli faccia veder a uno a uno distinti sopra questa carta; perchè io ancora mi contenterei, che senza staccar l'una dall'altra le quattro o le sei parti d'una linea, mi mostraste le sue divisioni segnate, o al più piegate ad angoli, formandone un quadrato o un esagono; perchè

mi persuado pure, che allora le chiamereste abbastanza distinte e attuate.

Simpl. Veramente sì.

Salv. Ora se l'inflettere una linea ad angoli, formandone ora un quadrato, ora un ottangolo, ora un poligono di quaranta, di cento o di mille angoli, è mutazione bastante a ridurre all' atto quelle quattro, otto, quaranta, cento e mille parti, che prima nella linea diritta erano per vostro detto in potenza, quando io formi di lei un poligono di lati infiniti, cioè quando io la infletta nella circonferenza d'un cerchio, non potrò io con pari licenza dire d'aver ridotto all' atto quelle parti infinite, che voi prima, mentre era retta, dicevate esser in lei contenute in potenza? nè si può negare tal risoluzione esser fatta ne' suoi infiniti punti non meno, che quella nelle sue quattro parti nel formarne un quadrato, o nelle sue mille nel formarne un millagono; imperocchè in lei non manca veruna delle condizioni che si trovano nel poligono di mille, e di cento mila lati. Questo applicato a una linea retta se gli posa sopra toccandola con uno de' suoi lati, cioè con una sua millesima parte; il cerchio, che è un poligono di lati infiniti, tocca la medesima retta con uno de' suoi lati, che è un sol punto diverso da tutti i suoi collaterali, e perciò da quelli diviso e distinto non meno, che un lato del poligono dai suoi conterminali. E come il poligono rivoltato sopra un piano stampa

con i toccamenti conseguenti de' suoi lati una linea retta eguale al suo perimetro; così il cerchio girato sopra un tal piano descrive con gl' infiniti suoi successivi contatti una linea retta eguale alla propria circonferenza. Non so adesso, Sig. Simp. se i Signori Peripatetici, ai quali io ammetto, come verissimo concetto, il continuo esser divisibile in sempre divisibili, sicchè continuando una tal divisione e suddivisione, mai non si perverrebbe alla fine, si contenteranno di concedere a me niuna delle tali loro divisioni esser l'ultima, come veramente non è, poichè sempre ve ne resta un' altra; ma bene l'ultima e altissima esser quella che lo risolve in infiniti indivisibili, alla quale concedo, che non si perverrebbe mai dividendo successivamente in maggiore e maggior moltitudine di parti; ma servendosi della maniera che propongo io di distinguere e risolvere tutta la infinità in un tratto solo (artifizio che non mi dovrebbe esser negato) crederei che dovessero quietarsi, ed ammetter questa composizione del continuo di atomi assolutamente indivisibili. E massime essendo questa una strada forse più d' ogni altra corrente per trarci fuori di molto intrigati laberinti, quali sono, oltre a quello già toccato della coerenza delle parti dei solidi, il comprender come stia il negozio della rarefazione e della condensazione, senza incorrer per causa di quella nell' in-

conveniente di dovere ammettere spazj vacui, e per questa la penetrazione dei corpi: inconvenienti, che ambedue mi pare che assai destramente vengano schivati coll'ammetter detta composizione d'indivisibili.

Simp. Io non so quello che i Peripatetici fusser per dire, atteso che le considerazioni fatte da voi credo che gli giugnerebbero per la maggior parte nuove, e come tali converrebbe esaminarle; e potrebbe accadere, che quegli vi ritrovassero risposte e soluzioni potenti a sciorre quei nodi che io per la brevità del tempo, e per la debolezza del mio ingegno non saprei di presente risolvere. Però sospendendo per ora questa parte sentirei ben volentieri come l'introduzione di questi indivisibili faciliti l'intelligenza della condensazione e della rarefazione, schivando nell'istesso tempo il vacuo e la penetrazione dei corpi.

Sagr. Sentirò io ancora con gran brama la medesima cosa all'intelletto mio tanto oscura, con questo però che io non rimanga defraudato di sentire, conforme a quello che poco fa disse il Sig. Simpl. le ragioni d'Aristotile in confutazion del vacuo, ed in conseguenza le soluzioni che voi gli arrecate, come convien fare, mentre voi ammettete quello che esso nega.

Salv. Faremo l'uno, e l'altro. E quanto al primo è necessario, che sicco-

me in grazia della rarefazione ci serviamo della linea descritta dal minor cerchio magiore della propria circonferenza, mentre vien mosso alla rivoluzione del maggiore, così per intelligenza della condensazione mostriamo, come alla conversione fatta dal minor cerchio, il maggiore descriva una linea retta minore della sua circonferenza; per la cui più chiara esplicazione porremo innanzi la considerazione di quello, che accade nei poligoni. In una descrizione simile a quell'altra siano due esagoni circa il comune centro L (Fig. IX.) che siano questi A B G, H I K colle linee parallele H O M, A B C, sopra le quali si abbiano a far le revoluzioni; e fermato l'angolo I del poligono minore volgasi esso poligono sin che il lato I K caschi sopra la parallela, nel qual moto il punto K descriverà l'arco K M, e 'l lato K I si unirà colla parte I M. Tra tanto bisogna vedere quel, che farà il lato G B del Poligono maggiore. E perchè il rivolgimento si fa sopra il punto I, la linea I B col termine suo B discriverà tornando in dietro l'arco B b sotto alla parallela C A, tal che quando il lato K I si congiugnerà colla linea M I, il lato B G si unirà colla linea b C, coll'avanzarsi per l'innanzi solamente, quanto è la parte B C, e ritirando indietro la parte suttesa all'arco B b, la quale vien soprapposta alla linea B A. Ed intendendo continuarsi nell'istesso modo la

conversione fatta dal minor poligono, questo descriverà bene, e passerà sopra la sua parallela una linea eguale al suo perimetro, ma il maggiore passerà una linea minore del suo perimetro la quantità di tante linee b B, quanti sono uno manco dei suoi lati; e sarà tal linea prossimamente eguale alla descritta dal poligono minore, eccedendola solamente di quanto è la b B. Qui dunque senza veruna repugnanza si scorge la cagione, per la quale il maggior poligono non trapassi (portato dal minore) con i suoi lati linea maggiore della passata dal minore; che è, perchè una parte di ciascheduno si soprappone al suo precedente conterminale.

Ma se considereremo i due cerchi intorno al centro A, li quali sopra le loro parallele posino, toccando il minore la sua nel punto B, ed il maggiore la sua nel punto C, qui nel cominciare a far la revoluzione del minore, non avverrà, che il punto B resti per qualche tempo immobile, sicchè la linea B G dando in dietro trasporti il punto C, come accadeva nei poligoni, che restando fisso il punto I, sinchè il lato K I cadesse sopra la linea I M, la linea I B riportava indietro il B termine del lato G B sino in b, onde il lato B G cadeva in b C soprapponendo alla linea B A la parte B b, e solo avanzandosi per l'innanzi la parte B C eguale alla I M, cioè a un lato del poligono minore,

per le quali soprapposizioni, che sono gli eccessi dei lati maggiori sopra i minori, gli avanzi, che restano eguali ai lati del minor poligono, vengono a comporre nell' intera revoluzione la linea retta eguale alla segnata, e misurata dal poligno minore. Ma qui dico, che se noi vorremo applicare un simil discorso all' effetto dei cerchi, converrà dire, dove i lati di qualsivoglia poligono son compresi da qualche numero, i lati del cerchio sono infiniti; quelli son quanti, e divisibili, questi non quanti e indivisibili; i termini dei lati del poligono nella revoluzione stanno per qualche tempo fermi, cioè ciascheduno tal parte del tempo di una intera conversione, qual parte esso è di tutto il perimetro; nei cerchi similmente le dimore de' termini de' suoi infiniti lati son momentanee, che tal parte è un instante di un tempo quanto, quale è un punto di una linea, che ne contiene infiniti; i regressi indietro fatti dai lati del maggior poligono sono non di tutto il lato, ma solamente dell' eccesso suo sopra il lato del minore, acquistando per l' innanzi tanto di spazio, quanto è il detto minor lato; nei cerchi, il punto, o lato C nella quiete instantanea del termine B si ritira indietro, quanto è il suo eccesso sopra il lato B, acquistando per l' innanzi quanto è il medesimo B. Ed in somma gl' infiniti lati indivisibili del maggior cerchio cogli

infiniti indivisibili ritiramenti loro, fatti nell' infinite instantanee dimore degl'infiniti termini degl' infiniti lati del minor cerchio, e con i loro infiniti progressi eguali agl'infiniti lati di esso minor cerchio, compongono, e disegnano una linea eguale alla descritta dal minor cerchio, contenente in se infinite soprapposizioni non quante, che fanno una costipazione, e condensazione senza veruna penetrazione di parti quante, quale non si può intendere farsi nella linea divisa in parti quante, quale è il perimetro di qualsivoglia poligono, il quale disteso in linea retta non si può ridurre in minor lunghezza, se non col far, che i lati si soprappongano, e penetrino l'un l' altro. Questa costipazione di parti non quante, ma infinite senza penetrazione di parti quante, e la prima distrazione di sopra dichiarata degl' infiniti indivisibili coll' interposizione di vacui indivisibili, credo che sia il più, che dir si possa per la condensazione, e rarefazione dei corpi, senza necessità d' introdurre la penetrazione dei corpi, o gli spazj quanti vacui. Se ci è cosa, che vi gusti, fatene capitale, se no, riputatela vana, e il mio discorso ancora, e ricercate di qualche altra esplicazione di maggior quiete per l' intelletto. Solo queste due parole vi replico, che noi siamo tra gl' infiniti, e gl' indivisibili.

Sagr. Che il pensiero sia sottile, ed

a' miei orecchi nuovo e peregrino, lo confesso liberamente: se poi nel fatto stesso la natura proceda con tale ordine, non saprei, che risolvermi: vero è, che sia che io non sentissi cosa, che maggiormente mi quietasse, per non rimaner muto affatto, mi atterrei a questa. Ma forse il Sig. Simp. avrà (quello che sin qui non ho incontrato) modo di esplicare l'esplicazione, che in materia così astrusa dai Filosofi si arreca; che in vero quel, che sin qui ho letto circa la condensazione, è per me così denso, e quel della rarefazione così sottile, che la mia debol vista questo non comprende, e quello non penetra.

Simp. Io son pieno di confusione, e trovo duri intoppi nell'un sentire, e nell' altro, e in particolare in questo nuovo, perchè secondo questa regola un' oncia di oro si potrebbe rarefare, e distrarre in una mole maggiore di tutta la terra, e tutta la terra condensare, e ridurre in minor mole di una noce: cose, che io non credo, nè credo, che voi medesimo crediate; e le considerazioni, e dimostrazioni sin qui fatte da voi, come che son cose Matematiche astratte, e separate dalla materia sensibile, credo, che applicate alle materie fisiche, e naturali non camminerebbero secondo coteste regole.

Salv. Che io vi sia per far vedere l'invisibile, nè io lo saprei fare, nè credo

voi lo ricercbiate, ma per quanto dai nostri sensi può esser compreso, giacchè voi avete nominato l'oro, non veggiam noi farsi immensa distrazione delle sue parti? Non so, se vi sia occorso il veder le maniere, che tengono gli artefici in condur l'oro tirato, il quale non è veramente oro se non in superficie, ma la materia interna è argento; ed il modo del condurlo è tale. Pigliano un cilindro, o volete dire una verga di argento lunga circa mezzo braccio, e grossa per tre, o quattro volte il dito pollice, e questa indorano con foglie di oro battuto, che sapete esser così sottile, che quasi va vagando per l'aria, e di tali foglie ne soprappongono otto, o dieci, e non più. Dorato che è, cominciano a tirarlo con forza immensa, facendolo passare per i fori della filiera, tornando a farlo ripassare molte e molte volte successivamente per fori più angusti, sicchè dopo molte e molte ripassate lo riducono alla sottigliezza di un capello di donna, se non maggiore, e tuttavia resta dorato in superficie. Lascio ora considerare a voi quale sia la sottigliezza, e distrazione, alla quale si è ridotta la sustanza dell'oro.

Simp. Io non vedo, che da questa operazione venga in conseguenza un assottigliamento della materia dell'oro da farne quelle maraviglie, che voi vorreste: prima perchè già la prima doratura fu di

dieci foglie di oro, che vengono a far notabile grossezza: secondariamente sebbene nel tirare, e assottigliare quell' argento cresce in lunghezza, scema però anco tanto in grossezza, che compensando l' una dimensione coll' altra, la superficie non si augumenta tanto, che per vestir l' argento di oro bisogni ridurlo a sottigliezza maggiore di quella delle prime foglie.

Salv. V' ingannate di assai, Sig. Simp. perchè l' accrescimento della superficie, è sudduplo dell' allungamento, come io potrei geometricamente dimostrarvi.

Sagr. Io e per me, e pel Signor Simp. vi pregherei a recarci tal dimostrazione, se però credete, che da noi possa esser capita.

Salv. Vedrò se così improvvisamente mi torna a memoria. Già è manifesto, che quel primo grosso cilindro di argento, ed il filo lunghissimo tirato sono due cilindri eguali, essendo l' istesso argento; talchè se io mostrerò, qual proporzione abbiano tra di loro le superficie dei cilindri eguali, averemo l' intento. Dico per tanto, che

La superficie dei cilindri eguali, trattone le basi, son tra di loro in sudduplicata proporzione delle loro lunghezze.

Sieno due cilindri eguali, l' altezze dei quali A B, C D, (Fig. x.) e sia la linea E media proporzionale tra esse. Dico la superficie del cilindro A B, trattone le basi, alla superficie del cilindro C D, trat-

tone parimente le basi, aver la medesima proporzione, che la linea A B alla linea E, che è suddupla dalla proporzione di A B a C D. Taglisi la parte del cilindro A B in F, e sia l'altezza A F eguale alla C D. E perchè le basi de' cilindri eguali rispondon contrariamente alle loro altezze, il cerchio base del cilindro C D al cerchio base del cilindro A B sarà come l'altezza B A alla D C, e perchè i cerchi son tra loro come i quadrati dei diametri, avranno detti quadrati la medesima proporzione, che la B A alla C D; ma come B A a C D così il quadrato B A al quadrato della E; son dunque tali quattro quadrati proporzionali; e però i lor lati ancora saranno proporzionali: e come la linea A B alla E, così il diametro del cerchio C al diametro del cerchio A; ma come i diametri, così sono le circonferenze, e come le circonferenze, così sono ancora le superficie de' cilindri egualmente alti; adunque come la linea A B alla E: così la superficie del cilindro C D alla superficie del cilindro A F. Perchè dunque l' altezza A F alla A B sta come la superficie A F alla superficie A B, e come l' altezza A B alla linea E, così la superficie C D alla A F sarà per la perturbata, come l' altezza A F alla E, così la superficie C D alla superficie A B, e convertendo come la superficie del cilindro A B alla superficie del cilindro C D, così la linea E alla A F,

cioè alla C D, ovvero la A B alla E, che è proporzione suddupla della A B alla C D, che è quello, che bisognava provare.

Ora se noi applicheremo questo, che si è dimostrato, al nostro proposito, presupposto, che quel cilindro di argento, che fu dorato, mentre non era più lungo di mezzo braccio, e grosso tre, o quattro volte più del dito pollice, assottigliato alla finezza di un capello si sia allungato sino in venti mila braccia (che sarebbe anche più assai) troveremo la sua superficie esser cresciuta dugento volte più di quello, che era: ed in conseguenza quelle foglie di oro, che furon soprapposte dieci in numero, distese in superficie dugento volte maggiore, ci assicurano l' oro, che cuopre la superficie delle tante braccia di filo, restar non più grosso, che la ventesima parte di una foglia dell'ordinario oro battuto. Considerate ora voi, qual sia la sua sottigliezza, e se è possibile concepirla fatta senza una immensa distrazione di parti, e se questa vi pare una esperienza, che tenda anche ad una composizione d' infiniti indivisibili nelle materie fisiche: sebben di ciò non mancano altri più gagliardi, e concludenti rincontri.

Sagr. La dimostrazione mi par tanto bella, che quando non avesse forza di persuader quel primo intento, per lo quale è stata prodotta (che pur mi par, che ve l'abbia grande) ad ogni modo benissimo

si è impiegato questo breve tempo, che per sentirla si è speso.

Salv. Giacchè vedo, che gustate tanto di queste geometriche dimostrazioni apportatrici di guadagni sicuri, vi dirò la compagna di questa, che soddisfa ad un quesito curioso assai. Nella passata aviamo quello, che accaggia dei cilindri eguali, ma diversi di altezze, ovvero lunghezze: è ben sentire quello, che avvenga ai cilindri eguali, di superficie, ma diseguali di altezze; intendendo sempre delle superficie sole, che gli circondano intorno, cioè non comprendendo le due basi superiore, e inferiore. Dico dunque, che

I cilindri retti, le superficie dei quali, trattone le basi, sieno eguali, hanno fra di loro la medesima proporzione, che le loro altezze contrariamente prese.

Sieno eguali le superficie dei due cilindri A E, C F (Fig. XI), ma l'altezza di questo C D maggiore dell'altezza dell'altro A B. Dico il cilindro A E al cilindro C F aver la medesima proporzione, che l'altezza C D alla A B. Perchè dunque la superficie C F è eguale alla superficie A E, sarà il cilindro C F minore dell'A E, perchè se gli fusse eguale, la sua superficie per la passata proposizione sarebbe maggiore della superficie A E, e molto più, se il medesimo cilindro C F fusse maggiore dell'A E. Intendasi il cilindro I D eguale all'A E, adunque per la prece-

dente la superficie del cilindro I D alla superficie dell' A E starà come l' altezza I F alla media tra I F, A B. Ma essendo pel dato la superficie A E eguale alla C F, ed avendo la superficie I D alla C F la medesima proporzione, che l' altezza I F, alla C D, adunque la C D è media tra le I F, A B. In oltre essendo il cilindro I D eguale al cilindro A E, avranno amendue la medesima proporzione al cilindro C F, ma l' I D al C F sta come l' altezza I F alla C D, adunque il cilindro A E al cilindro C F avrà la medesima proporzione, che la linea I F alla C D, cioè, che la C D alla A B, che è l' intento.

Di qui s' intende la ragione di un accidente, che non senza maraviglia vien sentito dal popolo; ed è, come possa essere, che il medesimo pezzo di tela più lungo per un verso, che per l' altro, se se ne facesse un sacco da tenervi dentro del grano, come si costumano fare con un fondo di tavola, terrà più servendoci per l' altezza del sacco della minor misura della tela, e coll' altra circondando la tavola del fondo, che facendo per l' opposito. Come se v. gr. la tela per un verso fusse sei braccia, e per l' altro dodici, più terrà, quando colla lunghezza di dodici si circonda la tavola del fondo, restando il sacco alto braccia sei, che se si circondasse un fondo di sei braccia avendone

dodici per altezza. Ora da quello, che si è dimostrato, alla generica notizia del capir più per quel verso, che per questo, si aggiugne la specifica, e particolare scienza del quanto ei contenga più, che è, che tanto più terrà, quanto sarà più basso, e tanto meno, quanto più alto: e così nelle misure assegnate essendo la tela il doppio più lunga, che larga, cucita per la lunghezza terrà la metà manco, che per l'altro verso. E parimente avendo una stuoja per fare una bugnola, lunga venticinque braccia, e larga v. g. sette, piegata per lo lungo terrà solamente sette misure di quelle, che per l'altro verso ne terrebbe venticinque.

Sagr. E così con nostro gusto particolare andiamo continuamente acquistando nuove cognizioni curiose, e non ignude di utilità. Ma nel proposito toccato adesso veramente non credo, che tra quelli che mancano di qualche cognizione di Geometria se ne trovassero quattro per cento, che non restassero a prima giunta ingannati, che quei corpi, che da superficie eguali son contenuti, non fussero ancora in tutto eguali: siccome nell' istesso errore incorrono parlando delle superficie, che per determinare, come spesse volte accade, delle grandezze di diverse Città, intera cognizione gli par d' averne, qualunque volta sanno la quantità dei recinti di quelle, ignorando, che può es-

cere un recinto eguale d'un altro, e la piazza contenuta da questo assai maggiore della piazza di quello, il che accade non solamente tra le superficie irregolari, ma tra le regolari, tra le quali quelle di più lati son sempre più capaci di quelle di manco lati: sicchè in ultimo il cerchio, come poligono di lati infiniti, è capacissimo sopra tutti gli altri poligoni di egual circuito; di che mi ricordo averne con gusto particolare veduta la dimostrazione studiando la Sfera del Sacrobosco con un dottissimo Comentario sopra.

Salv. È verissimo, ed avendo io ancora incontrato cotesto luogo, mi dette occasione di ritrovare, come con una sola e breve dimostrazione si concluda il cerchio esser maggiore di tutte le figure regolari isoperimetre, e dell'altre quelle di più lati maggiori di quelle di manco.

Sagr. Ed io, che sento tanto diletto in certe proposizioni, e dimostrazioni scelte, e non triviali, importunandovi vi prego, che me ne facciate partecipe.

Salv. In brevi parole vi spedisco, dimostrando il seguente Teorema, cioè:

Il cerchio è medio proporzionale tra qualsivogliano due poligoni regolari tra di loro simili, dei quali uno gli sia circonscritto, e l'altro gli sia isoperimetro. In oltre essendo egli minore di tutti i circonscritti, è all'incontro massimo di tutti gli isoperimetri. Dei medesimi poi circonscrit-

ti quelli, che hanno più angoli, son minori di quelli, che ne hanno manco, ma all'incontro degl' isoperimetri quelli di più angoli son maggiori.

Delli due poligoni simili A, B (Fig. XII.) sia l'A circonscritto al cerchio A, e l' altro B ad esso cerchio sia isoperimetro. Dico il cerchio esser medio proporzionale tra essi. Imperocchè (tirato il semidiametro A C) essendo il cerchio eguale a quel triangolo rettangolo, dei lati del quale, che sono intorno all'angolo retto, uno sia eguale al semidiametro A C, e l' altro alla circonferenza; e similmente essendo il Poligono A eguale al triangolo rettangolo, che intorno all' angolo retto ha uno dei lati eguale alla medesima retta A C, e l' altro al perimetro del medesimo poligono, è manifesto il circonscritto poligono aver al cerchio la medesima proporzione, che ha il suo perimetro alla circonferenza di esso cerchio, cioè al perimetro del poligono B, che alla circonferenza detta si pone eguale: ma il poligono A al B ha doppia proporzione, che 'l suo perimetro al perimetro di B (essendo figure simili) adunque il cerchio A è medio proporzionale tra i due poligoni A, B; ed essendo il poligono A maggior del cerchio A, è manifesto esso cerchio A esser maggiore del poligono B suo isoperimetro, ed in conseguenza massimo di tutti i poligoni regolari suoi isoperimetri.

Quanto all' altra parte, cioè di provare, che dei poligoni circonscritti al medesimo cerchio, quello di manco lati sia maggior di quello di più lati, ma che all' incontro dei poligoni isoperimetri quello di più lati sia maggiore di quello di manco lati, dimostreremo così. Nel cerchio, il cui centro O semidiametro O A, sia la tangente A D, ed in essa pongasi per esempio A D esser la metà del lato del pentagono circonscritto, ed A C metà del lato dell' ettagono, e tirinsi le rette O G C, O F D, e centro O, intervallo O C descrivasi l' arco E C I. E perchè il triangolo D O C è maggiore del settore E O C, e 'l settore C O I maggiore del triangolo C O A, maggior porporzione avrà il triangolo D O C al triangolo C O A, che'l settore E O C al settore C O I, cioè che'l settore F O G al settore G O A, e componendo, e permutando, il triangolo D O A al settore F O A avrà maggior proporzione, che il triangolo C O A al settore G O A, e dieci triangoli D O A a dieci settori F O A avranno maggior proporzione, che quattordici triangoli C O A a quattordici settori G O A, cioè il pentagono circonscritto avrà maggior proporzione al cerchio, che non gli ha l' ettagono: e però il pentagono sarà maggiore dell' ettagono. Intendasi ora un ettagono, ed un pentagono isoperimetri al medesimo cerchio. Dico l' ettagono esser maggiore

del pentagono. Imperocchè essendo l'istesso cerchio medio proporzionale tra 'l pentagono circonscritto, e 'l pentagono suo isoperimetro, e parimente medio tra 'l circonscritto, e 'l isoperimetro ettagono; essendosi provato il circonscritto pentagono esser maggiore del circonscritto ettagono, avrà esso pentagono maggior proporzione al cerchio, che l' ettagono; cioè il cerchio avrà maggior proporzione al suo isoperimetro pentagono, che all' isoperimetro ettagono; adunque il pentagono è minore dell' isoperimetro ettagono; che si doveva dimostrare.

Sagr. Gentilissima dimostrazione, e molto acuta. Ma dove siamo trascorsi a ingolfarsi nella Geometria? mentre eramo sul considerare le difficoltà promosse dal Sig. Simpl. che veramente son di gran considerazione, ed in particolare quella della condensazione mi par durissima.

Salv. Se la condensazione, e la rarefazione son moti opposti, dove si veda un immensa rarefazione, non si potrà negare una non men grandissima condensazione; ma rarefazioni immense, e quel che accresce la maraviglia, quasi che momentanee le vediamo noi tutto 'l giorno. E quale sterminata rarefazione è quella di una poca quantità di polvere d' artiglieria risoluta in una mole vastissima di fuoco? e quale oltre a questa l' espansione, direi quasi senza termine, della sua luce? E se quel fuoco, e questo lume si riunissero insieme

che pur non è impossibile, poichè dianzi stettero dentro quel piccolo spazio, qual condensamento sarebbe questo? Voi discorrendo troverete mille di tali rarefazioni, che sono molto più in pronto ad esser osservate, che le condensazioni: perchè le materie dense son più trattabili, e sottoposte ai nostri sensi, che ben maneggiamo le legne, e le vediamo risolvere in fuoco, e in luce, ma non così vediamo il fuoco, e 'l lume condensarsi a costituire il legno; vediamo i frutti, i fiori, e mille altre solide materie risolversi in gran parte in odori, ma non così osserviamo gli atomi odorosi concorrere alla costituzione dei solidi odorati. Ma dove manca la sensata osservazione, si dee supplir col discorso, che basterà per farci capaci non men del moto alla rarefazione, e resoluzione dei solidi, che alla condensazione delle sostanze tenui, e rarissime. In oltre noi trattiamo, come si possa far la condensazione, e rarefazione dei corpi, che si possono rarefare, e condensare, speculando in qual maniera ciò possa esser fatto senza l' introduzion del vacuo, e della penetrazione dei corpi; il che non esclude, che in natura possano esser materie, che non ammettono tali accidenti, ed in conseguenza non danno luogo a quelli, che voi chiamate inconvenienti, e impossibili. E finalmente, Sig. Simpl. io in grazia di voi altri Signori Filosofi mi sono

affaticato in specolare, come si possa intendere farsi la condensazione, e la rarefazione senza ammettere la penetrazione dei corpi, e l'introduzione degli spazj vacui: effetti da voi negati, ed abborriti, che quando voi gli voleste concedere, io non vi sarei così duro contraddittore. Però o ammettete questi inconvenienti; o gradite le mie specolazioni, o trovatene di più aggiustate.

Sagr. Alla negativa della penetrazione son io del tutto con i Filosofi Peripatetici. A quella del vacuo vorrei sentir ben ponderare la dimostrazione d'Aristotile, colla quale ei l'impugna, e quello che voi, Sig. Salv. gli opponete. Il Sig. Simp. mi farà grazia di arrecar puntualmente la prova del Filosofo, e voi Sig. Salv. la riposta.

Simp. Aristotile, per quanto mi sovviene, insurge contro alcuni antichi, i quali introducevano il vacuo, come necessario pel moto, dicendo, che questo senza quello non si potrebbe fare. A questo contrapponendosi Aristotile dimostra, che all'opposito il farsi (come vogliamo) il moto distrugge la posizione del vacuo; e 'l suo progresso è tale. Fa due supposizioni: l'una è di mobili diversi in gravità mossi nel medesimo mezzo: l'altra è dell'istesso mobile mosso in diversi mezzi. Quanto al primo, suppone che mobili diversi in gravità si muovano nell'istesso mezzo con di-

seguali velocità, le quali mantengano tra di loro la medesima proporzione, che le gravità; sicchè per esempio un mobile dieci volte più grave d' un altro si muova dieci volte più velocemente. Nell' altra posizione piglia, che le velocità del medesimo mobile in diversi mezzi ritengano tra di loro la proporzione contraria di quella che hanno le grossezze, o densità di essi mezzi; talmente che posto, v. g. che la crassizie dell' acqua fosse dieci volte maggiore di quella dell' aria, vuole, che la velocità nell' aria sia dieci volte più, che la velocità nell' acqua. E da questo secondo supposto trae la dimostrazione in cotal forma. Perchè la tenuità del vacuo supera d' infinito intervallo la corpulenza benchè sottilissima di qualsivoglia mezzo pieno, ogni mobile, che nel mezzo pieno si movesse per qualche spazio in qualche tempo; nel vacuo dovrebbe muoversi in uno istante; ma farsi moto in uno istante è impossibile; adunque darsi il vacuo in grazia del moto è impossibile.

Salv. L' argomento si vede, che è *ad hominem*, cioè contro a quelli, che volevano il vacuo come necessario pel moto. Che se io concederò l' argomento come concludente, concedendo insieme, che nel vacuo non si farebbe il moto, la posizion del vacuo assolutamente presa, e non in relazione al moto, non vien distrutta. Ma per dire quel, che per avventura potrebber rispondere quegli antichi, acciò meglio

si scorga, quanto concluda la dimostrazione di Aristotile, mi par, che si potrebbe andar contro agli assunti di quello, negandogli amendue. E quanto al primo: io grandemente dubito, che Aristotile non sperimentasse mai quanto sia vero, che due pietre una più grave dell' altra dieci volte, lasciate nel medesimo istante cader da un' altezza, v. gr. di cento braccia, fusser talmente differenti nelle loro velocità, che all' arrivo della maggior in terra l' altra si trovasse non avere nè anco sceso dieci braccia.

Simpl. Si vede pure dalle sue parole, che ei mostra di averlo sperimentato, perchè ei dice: Vediamo il più grave; or quel vedersi accenna l' averne fatta l' esperienza.

Sagr. Ma io, Sig. Simplicio, che ne ho fatto la prova, vi assicuro, che una palla di artiglieria, che pesi cento, dugento, ed anco più libbre, non anticiperà di un palmo solamente l' arrivo in terra della palla di un moschetto, che ne pesi una mezza, venendo anco dall' altezza di dugento braccia.

Salv. Ma senz' altre esperienze con breve, e concludente dimostrazione possiamo chiaramente provare non esser vero, che un mobile più grave si muova più velocemente di un altro men grave, intendendo di mobili dell' istessa materia; ed in somma di questi, dei quali parla Aristotile. Però ditemi, Sig. Simplicio, se voi am-

mettete, che di ciascheduno corpo grave cadente sia una da natura determinata velocità; sicchè l'accrescergliela, o diminuirgliela non si possa se non con usargli violenza, o opporgli qualche impedimento.

Simp. Non si può dubitare, che l'istesso mobile nell'istesso mezzo abbia una statuita, e da natura determinata velocità, la quale non se gli possa accrescere se non con nuovo impeto conferitogli, o diminuirgliela, salvo che con qualche impedimento, che lo ritardi.

Salv. Quando dunque noi avessimo due mobili, le naturali velocità dei quali fossero ineguali, è manifesto, che se noi congiugnessimo il più tardo col più veloce, questo dal più tardo sarebbe in parte ritardato, ed il tardo in parte velocitato dall'altro più veloce. Non concorrete voi meco in questa opinione?

Simp. Parmi, che così debba indubitabilmente seguire.

Salv. Ma se questo è, ed è insieme vero, che una pietra grande si muove per esempio con otto gradi di velocità, ed una minore con quattro, adunque congiugnendole amendue insieme, il composto di loro si moverà con velocità minore di otto gradi; ma le due pietre congiunte insieme fanno una pietra maggiore, che quella prima, che si moveva con otto gradi di velocità; adunque questa maggiore si muove men velocemente, che la minore: che

è contro alla vostra supposizione. Vedete dunque, come dal suppor, che il mobile più grave si muova più velocemente del men grave, io vi concludo il più grave muoversi men velocemente.

Simp. Io mi trovo avviluppato, perchè mi par pure, che la pietra minore aggiunta alla maggiore le aggiunga peso, e aggiugnendole peso non so, come non debba aggiugnerle velocità, o almeno non diminuirgliela.

Salv. Qui commettete un altro errore, Sig. Simplicio, perchè non è vero, che quella minor pietra accresca peso alla maggiore.

Simp. Oh questo passa bene ogni mio concetto.

Salv. Non lo passerà altrimenti, fatto che io vi abbia accorto dell'equivoco, nel quale voi andate fluttuando: però avvertite, che bisogna distinguere i gravi posti in moto, dai medesimi costituiti in quiete. Una pietra messa nella bilancia non solamente acquista peso maggiore col soprapporgli un'altra pietra, ma anco la giunta di un pennecchio di stoppa la farà pesar più quelle sei o dieci once, che peserà la stoppa; ma se voi lascerete liberamente cader da un'altezza la pietra legata colla stoppa, credete voi, che nel moto la stoppa graviti sopra la pietra, onde gli debba accelerar il suo moto: o pur credete, che ella la ritarderà sostenendola in

parte? Sentiamo gravitarci su le spalle, mentre vogliamo opporci al moto, che farebbe quel peso, che ci sta addosso; ma se noi scendessimo con quella velocità, che quel tal grave naturalmente scenderebbe, in che modo volete, che ci prema, e graviti sopra? Non vedete, che questo sarebbe un voler ferir colla lancia colui, che vi corre innanzi con tanta velocità, con quanta, o con maggiore di quella, colla quale voi lo seguite. Concludete pertanto, che nella libera, e naturale caduta la minor pietra non gravita sopra la maggiore, ed in conseguenza non le accresce peso, come fa nella quiete.

Simp. Ma chi posasse la maggiore sopra la minore?

Salv. Le accrescerebbe peso, quando il suo moto fosse più veloce; ma già si è concluso, che quando la minore fosse più tarda, ritarderebbe in parte la velocità della maggiore, tal che il lor composto si muoverebbe men veloce, essendo maggiore dell' altra; che è contro al vostro assunto. Concludiamo perciò, che i mobili grandi, e i piccoli ancora, essendo della medesima gravità in ispecie, si muovono con pari velocità.

Simpl. Il vostro discorso procede benissimo veramente: tuttavia mi par duro a credere, che una lagrima di piombo si abbia a muover così veloce, come una palla di artiglieria.

Salv. Voi dovevate dire un grano di rena, come una macina da guado. Io non vorrei, Sig. Simplicio, che voi faceste, come alcuni fanno, che divertendo il discorso dal principale intento vi attaccaste a un mio detto, che mancasse dal vero quanto è un capello, e che sotto questo capello voleste nasconder un difetto di un altro grande, quanto una gomina da nave. Aristotile dice: una palla di ferro di cento libbre cadendo dall'altezza di cento braccia arriva in terra prima, che una di una libbra sia scesa un sol braccio: io dico, che elle arrivano nell'istesso tempo: voi trovate, che la maggiore anticipa due dita la minore, cioè, che quando la grande percuote in terra, l'altra ne è lontana due dita: voi ora vorreste dopo queste due dita appiattare le novantanove braccia di Aristotile, e parlando solo del mio minimo errore, metter sotto silenzio l'altro massimo. Aristotile pronunzia, che mobili di diversa gravità nel medesimo mezzo si muovono (per quanto dipende dalla gravità) con velocitadi proporzionate ai pesi loro, e l'esemplifica con mobili, nei quali si possa scorgere il puro, ed assoluto effetto del peso, lasciando l'altre considerazioni sì delle figure, come dei minimi momenti, le quali cose grande alterazione ricevono dal mezzo, che altera il semplice effetto della sola gravità: che perciò si vede l'oro gravissimo sopra tutte l'altre ma-

terie ridotto in una sottilissima foglia andar vagando per aria; l'istesso fanno i sassi pestati in sottilissima polvere. Ma se voi volete mantenere la proposizione universale, bisogna che voi mostriate, la proporzione delle velocità osservarsi in tutti i gravi e che un sasso di venti libbre si muova dieci volte più veloce, che uno di due: il che vi dico esser falso, e che cadendo dall'altezza di cinquanta, o cento braccia arrivano in terra nell' istesso momento.

Simpl. Forse da grandissime altezze di migliaja di braccia seguirebbe quello, che in queste altezze minori non si vede accadere.

Salv. Se Aristotile avesse inteso questo, voi gli addossereste un altro errore, che sarebbe una bugia; perchè non si trovando in terra tali altezze perpendicolari, chiara cosa è, che Aristotile non ne poteva aver fatta esperienza: e pur ci vuol persuadere di averla fatta, mentre dice, che tale effetto si vede.

Simp. Aristotile veramente non si serve di questo principio, ma di quell'altro, che non credo, che patisca queste difficoltà.

Salv. E l'altro ancora non è men falso di questo; e mi maraviglio, che per voi stesso non penetriate la fallacia, e che non vi accorgiate, che quando fosse vero, che l'istesso mobile in mezzi di differente

sottilità, e rarità, ed in somma di diversa cedenza, quali per esempio son l'acqua, e l'aria, si movesse con velocità nell'aria maggiore, che nell'acqua secondo la proporzione della rarità dell'aria a quella dell'acqua ne seguirebbe, che ogni mobile, che scendesse per aria, scenderebbe anco nell'acqua; il che è tanto falso, quanto che moltissimi corpi scendono nell'aria, che nell'acqua non pur non discendono, ma sormontano all'in su.

Simp. Io non intendo la necessità della vostra conseguenza; e più dirò che Aristotile parla di quei mobili gravi, che discendono nell'un mezzo, e nell'altro, e non di quelli, che scendono nell'aria, e nell'acqua vanno all'in su.

Salv. Voi arrecate pel Filosofo di quelle difese, che egli assolutamente non produrrebbe per non aggravare il primo errore. Però ditemi se la corpulenza dell'acqua, o quel che si sia, che ritarda il moto, ha qualche proporzione alla corpulenza dell'aria, che meno lo ritarda; e avendola, assegnatela a vostro beneplacito.

Simp. Halla, e ponghiamo ch'ella sia in proporzione decupla; e che però la velocità di un grave, che discenda in amendue gli elementi, sarà dieci volte più tardo nell'acqua, che nell'aria.

Salv. Piglio adesso un di quei gravi, che vanno in giù nell'aria, ma nell'acqua

no, qual sarebbe una palla di legno, e vi domando, che voi gli assegniate qual velocità più vi piace, mentre scende per aria.

Simp. Ponghiamo, che ella si muova con venti gradi di velocità.

Salv. Benissimo. Ed è manifesto, che tal velocità a qualche altra minore può aver la medesima proporzione, che la corpulenza dell'acqua a quella dell'aria, e che questa sarà la velocità di due soli gradi; tal che veramente a filo, e a dirittura, conforme all'assunto d'Aristotile, si dovrebbe concludere, che la palla di legno, che nell'aria dieci volte più cedente dell'acqua si muove scendendo con venti gradi di velocità, nell'acqua dovrebbe scendere con due, e non venire a galla dal fondo come fa: se già voi non voleste dire, che nell'acqua il venire ad alto nel legno sia l'istesso, che 'l calare a basso con due gradi di velocità; il che non credo. Ma già che la palla del legno non cala al fondo, credo pure che mi concederete, che qualche altra palla d'altra materia diversa dal legno si potrebbe trovare, che nell'acqua scendesse con due gradi di velocità.

Simpl. Potrebbesi senza dubbio; ma di materia notabilmente più grave del legno.

Salv. Questo è quel ch'io vo cercando. Ma questa seconda palla, che nell'acqua discende con due gradi di velocità,

con quanta velocità discenderà nell'aria? Bisogna (se volete servar la regola d'Aristotile) che rispondiate, che si muoverà con venti gradi: ma venti gradi di velocità avete voi medesimo assegnati alla palla di legno: adunque questa, e l'altra assai più grave si moveranno per l'aria con egual velocità. Or come accorda il Filosofo questa conclusione coll'altra sua, che i mobili di diversa gravità nel medesimo mezzo si muovono con diverse velocità, e diverse tanto, quanto le gravità loro? Ma senza molte profonde contemplazioni, come avete voi fatto a non osservar accidenti frequentissimi, e palpabilissimi, e non badare a due corpi, che nell'acqua si muoveranno l'uno cento volte più velocemente dell'altro, ma che nell'aria poi quel più veloce non supererà l'altro di un sol centesimo? come per esempio un uovo di marmo scenderà nell'acqua cento volte più presto, che alcuno di gallina; che per l'aria nell'altezza di venti braccia non l'anticiperà di quattro dita; ed in somma tal grave andrà al fondo in tre ore in dieci braccia d'acqua, che in aria le passerà in una battuta, o due di polso, e tale (come sarebbe una palla di piombo) le passerà in tempo facilmente men che doppio. E qui so ben, Signor Simplicio, che voi comprendete, che non ci ha luogo distinzione, o risposta veruna. Concludiamo per tanto, che tale argomento non

conclude nulla contro al vacuo; e quando concludesse, distruggerebbe solamente gli spazj notabilmente grandi, quali nè io, nè credo, che quegli antichi supponessero naturalmente darsi, sebben forse con violenza si possan fare, come par che da varie esperienze si raccolga, le quali troppo lungo sarebbe il volere al presente arrecare.

Sagr. Vedendo che il Sig. Simplicio tace, piglierò io campo di dire alcuna cosa. Già che assai apertamente avete dimostrato, come non è altrimenti vero, che mobili disegualmente gravi si muovono nel medesimo mezzo con velocità proporzionate alle gravità loro, ma con eguale; intendendo dei gravi dell' istessa materia, ovvero dell' istessa gravità in ispecie, ma non già (come credo) di gravità differenti in ispecie (perchè non penso, che voi intendiate di concluderci, ch' una palla di sughero si muova con pari velocità ch' una di piombo) ed avendo di più dimostrato molto chiaramente, come non è vero, che il medesimo mobile in mezzi di diverse resistenze ritenga nelle velocità, e tardità sue la medesima proporzione, che le resistenze; a me sarebbe cosa gratissima il sentire, quali siano le proporzioni, che nell'un caso, e nell' altro vengono osservate.

Salv. I quesiti son belli, ed io ci ho molte volte pensato; vi dirò il discorso fattoci attorno, e quello che ne ho in ul-

timo ritratto. Dopo essermi certificato non esser vero, che il medesimo mobile in mezzi di diversa resistenza osservi nella velocità la proporzione delle cadenze di essi mezzi; nè meno, che nel medesimo mezzo mobili di diversa gravità ritengano nelle velocità loro la proporzione di esse gravità (intendendo anco delle gravità diverse in ispecie) cominciai a comporre insieme amendue questi accidenti, avvertendo quello, che accadesse dei mobili differenti di gravità posti in mezzi di diverse resistenze, e m'accorsi le disegualità delle velocità trovarsi tuttavia maggiori ne' mezzi più resistenti, che nei più cedenti, e ciò con diversità tali, che di due mobili, che scendendo per aria pochissimo differiranno in velocità di moto, nell' acqua l' uno si moverà dieci volte più veloce dell' altro; anzi che tale, che nell' aria velocemente discende, nell' acqua non solo non iscenderà, ma resterà del tutto privo di moto, e quel che è più, si moverà all'insù: perchè si potrà talvolta trovare qualche sorte di legno, o qualche nodo, o radica di quello, che nell' acqua potrà stare in quiete, che nell' aria velocemente discenderà.

Sagr. Io più volte mi son messo con una estrema flemma per vedere di ridurre una palla di cera, che per se stessa non va a fondo, coll' aggiugnerle grani di rena, a segno tale di gravità simile al-

l' acqua, che nel mezzo di quella si fermasse; nè mai per diligenza usata mi successe il poterlo conseguire; onde non so se altra materia solida si ritrovi tanto naturalmente simile in gravità all'acqua, che posta in essa in ogni luogo potesse fermarsi.

Salv. Sono in questo, come in mille altre operazioni, assai più diligenti molti animali, che non siamo noi altri. E nel vostro caso i pesci vi avrebber potuto porger qualche documento, essendo in questo esercizio così dotti, che ad arbitrio loro si equilibrano non solo con un'acqua, ma con differenti notabilmente o per propria natura, o per una sopravvenente torbida, o per salsedine, che fa differenza assai grande; si equilibrano, dico, tanto esattamente, che senza punto muoversi restano in quiete in ogni luogo: e ciò per mio credere fanno eglino, servendosi dello strumento datogli dalla natura a cotal fine, cioè di quella vescichetta, che hanno in corpo, la quale per uno assai angusto meato risponde alla lor bocca; e per quello a posta loro o mandano fuori parte dell'aria, che in dette vesciche si contiene, o venendo col nuoto a galla, altra ne attraggono, rendendosi con tale arte or più, or meno gravi dell'acqua, ed a lor beneplacito equilibrandosegli.

Sagr. Io con un altro artifizio ingannai alcuni amici, appresso i quali mi era

vantato di ridurre quella palla di cera al giusto equilibrio coll'acqua, ed avendo messo nel fondo del vaso una parte di acqua salata, e sopra quella della dolce, mostrai loro la palla, che a mezz'acqua si fermava, e spinta nel fondo, e sospinta ad alto nè in questo, nè in quel sito restava, ma ritornava nel mezzo.

Salv. Non è cotesta esperienza priva di utilità: perchè trattandosi dai Medici in particolare delle diverse qualità di acque, e tra l'altre principalmente della leggerezza, o gravità più di questa, che di quella, con una simil palla aggiustata, sicchè resti ambigua, per così dire, tra lo scendere, e 'l salire in un'acqua, per minima che sia la differenza di peso tra due acque, se in una tal palla scenderà, nell'altra, che sia più grave, salirà. Ed è talmente esatta cotale esperienza, che la giunta di due grani di sale solamente, che si mettano in sei libbre d'acqua, farà risalire dal fondo alla superficie quella palla, che vi era pur allora scesa. E più vi voglio dire in confermazione dell'esattezza di questa esperienza, ed insieme per chiara prova della nulla resistenza dell'acqua all'esser divisa, che non solamente l'ingravirla colla mistione di qualche materia più grave di lei induce tanto notabil differenza, ma il riscaldarla, o raffreddarla un poco produce il medesimo effetto, e con sì sottile operazione, che l'in-

fonder quattro gocciole d'altra acqua un poco più calda, o un poco più fredda delle sei libbre, farà che la palla vi scenda, o vi sormonti: vi scenderà infondendovi la calda, e monterà per l'infusione della fredda. Or vedete quanto s'ingannino quei Filosofi, che voglion metter nell'acqua viscosità, o altra congiunzione di parti, che la facciano resistente alla divisione, o penetrazione.

Sagr. Vidi molto concludenti discorsi intorno a questo argomento in un trattato del nostro Accademico: tuttavia mi resta un gagliardo scrupolo, il quale non so rimuovere; perchè se nulla di tenacità, e coerenza risiede tra le parti dell'acqua, come possono sostenersi assai grandi pezzi, e molto rilevati in particolare sopra le foglie dei cavoli senza spargersi, e spianarsi?

Salv. Ancorchè vero sia, che colui, che ha dalla sua la conclusione vera, possa risolvere tutte l'istanze, che vengono opposte in contrario, non però mi arrogherei io il poter ciò fare, nè la mia impotenza dee denigrare la candidezza della verità. Io primieramente vi confesso, che non so, come vada il negozio del sostenersi quei globi d'acqua assai rilevati, e grandi, sebbene io so di certo, che da tenacità interna, che sia tra le sue parti, ciò non deriva; onde resta necessario, che la cagione di cotal effetto risegga fuori. Che ella non sia interna, oltre all'espe-

rienze mostrate, ve lo posso confermare con un'altra efficacissima. Se le parti di quell'acqua, che rilevata si sostiene, mentre è circondata dall'aria, avessero cagione interna per ciò fare, molto più si sosterrebbono circondate che fossero da un mezzo, nel quale avessero minor propensione di discendere, che nell'aria ambiente non hanno; ma un mezzo tale sarebbe ogni fluido più grave dell'aria, v. g. il vino: e però infondendo intorno a quel globo d'acqua del vino, se gli potrebbe alzare intorno intorno, senza che le parti dell'acqua, conglutinate dall'interna viscosità, si dissolvessero; ma ciò non accade egli, anzi non prima se gli accosterà il liquore sparsogli intorno, che senza aspettar, che molto se gli elevi intorno, si dissolverà, e spianerà restandogli di sotto, se sarà vino rosso; è dunque esterna, e forse dell'aria ambiente la cagione di tale effetto. E veramente si osserva una gran dissensione tra l'aria, e l'acqua, la quale ho io in un'altra esperienza osservata; e questa è: S'io empio d'acqua una palla di cristallo, che abbia un foro angusto, quant'è la grossezza d'un fil di paglia, e così piena la volto colla bocca all'ingiù, non però l'acqua, benchè gravissima, e pronta a scender per aria, nè l'aria altrettanto disposta a salire, come leggerissima, per l'acqua, si accordano quella a scendere uscendo pel foro, e questa a salire en-

trandovi, ma restano amendue ritrose e contumaci. All' incontro poi se io presenterò a quel foro un vaso con del vino rosso, che quasi insensibilmente è men grave dell' acqua, lo vedremo subito con tratti rosseggianti lentamente ascendere per mezzo l'acqua, e l'acqua con pari tardità scender pel vino senza punto mescolarsi, fin che finalmente la palla si empirà tutta di vino, e l' acqua calerà tutta nel fondo del vaso di sotto. Or che si dee qui dire, o che argumentarne, fuor che una disconvenienza tra l' acqua, e l' aria occulta a me, ma forse . . . . .

Simpl. Mi vien quasi da ridere nel veder la grande antipatia, che ha il Sig. Salviati coll'antipatia, che nè pur vuol nominarla, e pur è tanto accomodata a scior la difficoltà.

Salv. Or sia questa in grazia del Sig. Simplicio la soluzione del nostro dubbio; e lasciato il digredire torniamo al nostro proposito. Veduto come la differenza di velocità nei mobili di gravità diverse si trova esser sommamente maggiore nei mezzi più e più resistenti: ma che più nel mezzo dell'argento vivo l'oro non solamente va in fondo più velocemente del piombo, ma esso solo vi discende, e gli altri metalli, e pietre tutti vi si muovono in su, e vi galleggiano; dove che tra palle d' oro, di piombo, di rame, di porfido, o di altre ma-

terie gravi, quasi del tutto insensibile sarà la disegualità del moto per aria, che sicuramente una palla d'oro nel fine della scesa di cento braccia non preverrà una di rame di quattro dita: veduto, dico, questo, cascai in opinione, che se si levasse totalmente la resistenza del mezzo, tutte le materie discenderebbero con eguali velocità.

Simpl. Gran detto è questo, Sig. Salv. Io non crederò mai, che nell'istesso vacuo, se pur vi si desse il moto, un fiocco di lana si movesse così veloce come un pezzo di piombo.

Salv. Pian piano, Sig. Simpl. la vostra difficoltà non è tanto recondita, nè io così inavveduto, che si debba credere, che non mi sia sovvenuta, e che in conseguenza io non vi abbia trovato ripiego. Però per mia dichiarazione, e vostra intelligenza sentite il mio discorso. Noi siamo sul volere investigare quello, che accaderebbe ai mobili differentissimi di peso in un mezzo, dove la resistenza sua fosse nulla, sicchè tutta la differenza di velocità, che tra essi mobili si ritrovasse, riferir si dovesse alla sola disuguaglianza di peso. E perchè solo uno spazio del tutto voto di aria, e di ogni altro corpo, ancor che tenue, e cedente, sarebbe atto a sensatamente mostrarci quello, che ricerchiamo, giacchè manchiamo di cotale spazio, an-

dremo osservando ciò, che accaggia nei mezzi più sottili, e meno resistenti in comparazione di quello, che si vede accadere negli altri manco sottili e più resistenti. Che se noi troveremo in fatto, i mobili differenti di gravità meno e meno differir di velocità, secondo che i mezzi più e più cedenti si troveranno; e che finalmente, ancorchè estremamamente diseguali di peso nel mezzo più di ogni altro tenue, sebben non voto, piccolissima si scorga, e quasi inosservabile la diversità della velocità, parmi che ben potremo con molto probabil conghiettura credere, che nel vacuo sarebbero le velocità loro del tutto eguali. Per tanto consideriamo ciò che accade nell' aria; dove per avere una figura di superficie ben terminata, e di materia leggerissima, voglio che pigliamo una vescica gonfiata, nella quale l'aria, che vi sarà dentro, peserà nel mezzo dell'aria stessa niente, o poco, perchè poco vi si potrà comprimere, talchè la gravità è solo quella poca della stessa pellicola, che non sarebbe la millesima parte del peso di una mole di piombo grande, quanto la medesima vescica gonfiata. Queste, Sig. Simp. lasciate dall'altezza di quattro, o sei braccia, di quanto spazio stimereste, che il piombo fusse per anticipare la vescica nella sua scesa? siate sicuro, che non l'anticiperebbe

del triplo, nè anche del doppio, sebben già l'aveste fatto mille volte più veloce.

Simpl. Potrebbe esser, che nel principio del moto, cioè nelle prime quattro, o sei braccia accadesse cotesto, che dite: ma nel progresso, ed in una lunga continuazione credo che il piombo se la lascerebbe in dietro non solamente delle dodici parti dello spazio le sei, ma anco le otto, e le dieci.

Salv. Ed io ancora credo l'istesso; e non dubito, che in distanze grandissime potesse il piombo aver passato cento miglia di spazio, che la vescica ne avesse passato un solo. Ma questo, Sig. Simp. mio, che voi proponete come effetto contrariante alla mia proposizione, è quello che massimamente la conferma. È (torno a dire) l'intento mio dichiarare, come delle diverse velocità di mobili di differente gravità non ne sia altrimenti causa la diversa gravità, ma che ciò dipenda da accidenti esteriori, ed in particolare dalla resistenza del mezzo; sicchè tolta questa tutti i mobili si moverebber con i medesimi gradi di velocità. E questo deduco io principalmente da quello, che ora voi stesso ammettete, e che è verissimo, cioè, che di mobili differentissimi di peso le velocità più e più differiscono, secondo che maggiori e maggiori sono gli spazj, che essi van trapassando: effetto, che non seguirebbe, quando ei dipendesse dalle diffe-

renti gravità: Imperocchè essendo esse sempre le medesime, medesima dovrebbe mantenersi sempre la proporzione tra gli spazj passati, la qual proporzione noi vediamo andar nella continuazion del moto sempre crescendo; poichè l'un mobile gravissimo nella scesa di un braccio non anticiperà il leggerissimo della decima parte di tale spazio, ma nella caduta di dodici braccia lo preverrà della terza parte, in quella di cento l'anticiperà di $\frac{90}{100}$

Simpl. Tutto bene: ma seguitando le vostre vestigie, se la differenza di peso in mobili di diversa gravità non può cagionare la mutazion di proporzione nelle velocità loro, attesochè le gravità non si mutano, nè anco il mezzo, che sempre si suppone mantenersi l'istesso, potrà cagionare alterazion alcuna nella proporzione delle velocità.

Salv. Voi acutamente fate instanza contro al mio detto, la quale è ben necessario di risolvere. Dico per tanto, che un corpo grave ha da natura intrinseco principio di muoversi verso il comun centro dei gravi, cioè del nostro globo terrestre, con movimento continuamente accelerato, ed accelerato sempre egualmente, cioè, che in tempi eguali si fanno aggiunte eguali di nuovi momenti, e gradi di velocità E questo si dee intender verificarsi, tuttavolta che si rimovessero tutti gl'impedimenti acci-

dentarj, ed esterni; tra i quali uno ve ne ha, che noi rimuover non possiamo, che è l'impedimento del mezzo pieno, mentre dal mobile cadente deve essere aperto, e lateralmente mosso, al qual moto trasversale il mezzo, benchè fluido, cedente, e quieto, si oppone con resistenza or minore, ed or maggiore, e maggiore, secondo che lentamente, e velocemente ei deve aprirsi per dar il transito al mobile, il quale perchè, come ho detto, si va per sua natura continuamente accelerando, vien per conseguenza ad incontrar continuamente resistenza maggiore nel mezzo, e però ritardamento, e diminuzione nell' acquisto di nuovi gradi di velocità, sicchè finalmente la velocità perviene a tal segno, e la resistenza del mezzo a tal grandezza, che bilanciandosi fra loro levano il più accelerarsi, e riducono il mobile in un moto equabile, ed uniforme, nel quale egli continua poi di mantenersi sempre. È dunque nel mezzo accrescimento di resistenza, non perchè si muti la sua essenza, ma perchè si altera la velocità colla quale ei dee aprirsi, e lateralmente muoversi, per cedere il passaggio al cadente, il quale va successivamente accelerandosi. Ora il vedere, che la resistenza dell' aria al poco momento della vescica è grandissima, ed al gran peso del piombo è piccolissima, mi fa tener per fermo, che chi la rimovesse del tutto, coll' arrecare alla vescica grandissimo co-

modo, ma ben poco al piombo, le velocità loro si pareggerebbero. Posto dunque questo principio, che nel mezzo, dove o per esser vacuo, o per altro non fusse resistenza veruna che ostasse alla velocità del moto, sicchè di tutti i mobili le velocità fusser pari, potremo assai congruamente assegnar le proporzioni delle velocità di mobili simili e dissimili nell' istesso, ed in diversi mezzi pieni, e però resistenti. E ciò conseguiremo col por mente, quanto la gravità del mezzo detrae alla gravità del mobile, la qual gravità è lo strumento col quale il mobile si fa strada rispingendo le parti del mezzo alle bande, operazione che non accade nel mezzo vacuo, e che però differenza nessuna si ha da attendere dalla diversa gravità. E perchè è manifesto il mezzo detrarre alla gravità del corpo da lui contenuto, quanto è il peso di altrettanta della sua materia, scemando con tal proporzione le velocità dei mobili che nel mezzo non resistente sarebbero (come si è supposto) eguali, aremo l' intento. Come per esempio, posto che il piombo sia dieci mila volte più grave dell' aria, ma l'ebano mille volte solamente, delle velocità di queste due materie, che assolutamente prese, cioè rimossa ogni resistenza, sarebbero eguali, l'aria al piombo detrae delli dieci mila gradi uno, ma all' ebano suttrae de' mille gradi uno, o vogliam dire dei dieci mila dieci. Quando dunque il piom-

bo e l'ebano scenderanno per aria da qualsivoglia altezza, la quale rimosso il ritardamento dell' aria avrebbon passata nell' istesso tempo, l'aria alla velocità del piombo detrarrà dei dieci mila gradi uno, ma all' ebano detrae dei dieci mila dieci, che è quanto a dire, che divisa quella altezza dalla quale si partono tali mobili, in dieci mila parti, il piombo arriverà in terra, restando in dietro l'ebano dieci, anzi pur nove delle dette dieci mila parti. E che altro è questo, salvo che cadendo una palla di piombo da una torre alta dugento braccia trovar che ella anticiperà una di ebano di manco di quattro dita? Pesa l'ebano mille volte più dell' aria, ma quella vescica così gonfia pesa solamente quattro volte tanto; l'aria dunque dalla intrinseca e naturale velocità dell' ebano detrae dei mille gradi uno, ma a quella che pur della vescica assolutamente sarebbe stata l'istessa, l'aria ne toglie delle quattro parti l'una: allora dunque che la palla di ebano cadendo dalla torre giugnerà in terra, la vescica ne averà passati i tre quarti solamente. Il piombo è più grave dell' acqua dodici volte, ma l' avorio il doppio solamente: l'acqua dunque alle assolute velocità loro, che sarebbero eguali, toglie al piombo la duodecima parte, ma all' avorio la metà: nell' acqua dunque quando il piombo sarà sceso undici braccia, l'avorio ne arà sceso sei. E discorrendo con tal

regola credo che troveremo l'esperienze molto più aggiustatamente risponder a cotal computo, che a quello di Aristotile. Con simil progresso troveremo la proporzione tra le velocità del medesimo mobile in diversi mezzi fluidi, paragonando non le diverse resistenze dei mezzi, ma considerando gli eccessi di gravità del mobile sopra le gravità dei mezzi; v. g. lo stagno è mille volte più grave dell'aria, e dieci più dell'acqua: adunque divisa la velocità assoluta dello stagno in mille gradi, nell'aria, che glie ne detrae la millesima parte, si moverà con gradi novecento novantanove, ma nell'acqua con novecento solamente, essendo che l'acqua gli detrae solo la decima parte della sua gravità, e l'aria la millesima. Posto un solido poco più grave dell'acqua, qual sarebbe v. g. il legno di rovere, una palla del quale pesando, diremo mille dramme, altrettanta acqua ne pesasse novecencinquanta, ma tanta aria ne pesasse due, è manifesto, che posto che la velocità sua assoluta fosse di mille gradi, in aria resterebbe di novecennovant'otto, ma in acqua solamente cinquanta, attesochè l'acqua dei mille gradi di gravità glie ne toglie novecencinquanta, e glie ne lascia solamente cinquanta; tal solido dunque si moverebbe quasi venti volte più velocemente in aria che in acqua: sicoome l'eccesso della gravità sua sopra

quella dell' acqua è la vigesima parte della sua propria. E qui voglio che consideriamo, che non potendo muoversi in giù nell'acqua, se non materie più gravi in ispecie di lei; e per conseguenza per molte centinaja di volte più gravi dell' aria, nel ricercare qual sia la proporzione delle velocità loro in aria ed in acqua, possiamo senza notabile errore far conto, che l'aria non detragga cosa di momento dalla assoluta gravità, ed in conseguenza dall' assoluta velocità di tali materie; onde speditamente trovato l'eccesso della gravità loro sopra la gravità dell' acqua, diremo, la velocità loro per aria alla velocità loro per acqua aver la medesima proporzione, che la loro totale gravità all' eccesso di questa sopra la gravità dell' acqua. Per esempio una palla d'avorio pesa venti once, altrettanta acqua pesa once diciassette; adunque la velocità dell'avorio in aria alla sua velocità in acqua è prossimamente come venti a tre.

Sagr. Grandissimo acquisto ho fatto in una materia per se stessa curiosa, e nella quale, ma senza profitto, ho molte volte affaticata la mente: nè mancherebbe altro per poter anche praticare queste speculazioni, se non il trovar modo di poter venire in cognizione di quanta sia la gravità dell' aria rispetto all' acqua, ed in conseguenza all' altre materie gravi.

Simp. Ma quando si trovasse, che l'aria in vece di gravità avesse leggerezza, che si dovrebbe dire degli avuti discorsi per altro molto ingegnosi?

Salv. Converrebbe dire, che fussero stati veramente aerei, leggieri, e vani. Ma vorrete voi dubitare, se l'aria sia grave, mentre avete il testo chiaro di Aristotile, che l'afferma, dicendo, che tutti gli elementi hanno gravità, anco l'aria istessa? segno di che (soggiugne egli) ne è, che l'otro gonfiato pesa più che sgonfiato.

Simpl. Che l'otro o pallone gonfiato pesi più, crederei io, che procedesse non da gravità che sia nell'aria, ma nei molti vapori grossi tra essa mescolati in queste nostre regioni basse; mercè dei quali, direi io, che cresce la gravità dell'otro.

Salv. Non vorrei che lo diceste voi, e molto meno, che le faceste dire ad Aristotile, perchè parlando egli degli elementi, e volendomi persuadere, che l'elemento dell'aria è grave, facendomelo veder coll'esperienza; se nel venire alla prova ei mi dicesse: piglia un otro, ed empilo di vapori grossi, ed osserva, che il suo peso crescerà; io gli direi, che più ancora peserebbe chi l'empiesse di semola; ma soggiugnerei dopo, che tali esperienze provano, che le semole ed i vapori grossi son gravi, ma quanto all'elemento dell'aria, resterei nel medesimo dubbio di prima. L'esperienza dunque di Aristotile è buona,

e la proposizion vera. Ma non direi già così di certa altra ragione presa pure *a signo* di un tal Filosofo, del quale non mi sovviene il nome, ma so che l'ho letta, il quale argomenta l'aria esser più grave che leggera, perchè più facilmente porta i gravi all' ingiù, che i leggieri all' insù.

Sagr. Bene per mia fe. Adunque per questa ragione l'aria sarà molto più grave dell'acqua, avvengachè tutti i gravi son portati più facilmente in giù per aria che per acqua, e tutti i leggeri più agevolmente in questa che in quella, anzi infinite materie salgono per acqua, che per aria calano a basso. Ma sia la gravità dell'otro, Sig. Simp. o per i vapori grossi, o per l'aria pura, questo niente osta al proposito nostro, che cerchiamo quel che accade a' mobili che si muovono in questa nostra regione vaporosa. Però ritornando a quello che più mi preme, vorrei per intera ed assoluta instruzione della presente materia, non solo restare assicurato, che l'aria sia (come io tengo per fermo) grave, ma vorrei, se è possibile, saper quanta sia la sua gravità. Però, Sig. Salv. se avete da soddisfarmi in questo ancora, vi prego a farmene favore.

Salv. Che nell' aria risegga gravità positiva, e non altrimenti, come alcuni hanno creduto, leggerezza, la quale forse in veruna materia non si ritrova, assai concludente argomento ce ne porge l'esperien-

za del pallone gonfiato posta da Aristotile, perchè se qualità di assoluta e positiva leggerezza fusse nell' aria, multiplicata e compressa l'aria crescerebbe la leggerezza, e in conseguenza la propensione di andare in su; ma l'esperienza mostra l' opposito. Quanto all' altra domanda, che è del modo d'investigare la sua gravità, io l'ho praticato in cotal maniera. Ho preso un fiasco di vetro assai capace, e col collo strozzato, al quale ho applicato un ditale di cuojo legato bene stretto nella strozzatura del fiasco, avendo in capo al detto ditale inserta, e saldamente fermata un' animella da pallone, per la quale con uno schizzatojo ho per forza fatto passar nel fiasco molta quantità di aria, della quale, perchè patisce di esser assaissimo condensata, se ne può cacciare due e tre altri fiaschi oltre a quella che naturalmente vi capisce. In una esattissima bilancia ho io poi pesato molto precisamente tal fiasco coll' aria dentrovi compressa, aggiustando il peso con minuta arena. Aperta poi l'animella, e dato l'esito all' aria violentemente nel vaso contenuta, e rimessolo in bilancia, trovandolo notabilmente alleggerito, sono andato detraendo del contrappeso tanta arena, salvandola da parte, che la bilancia resti in equilibrio col residuo contrappeso, cioè col fiasco. E qui non è dubbio, che il peso della rena salvata è quello dell' aria, che forzatamente fu messa nel fia-

sco, e che ultimamente n'è uscita. Ma tale esperienza sin qui non mi assicura di altro, se non che l'aria contenuta violentemente nel vaso pesò quanto la salvata arena, ma quanto risolutamente, e determinatamente pesi l'aria rispetto all'acqua, o ad altra materia grave, non per ancora so io, nè posso sapere, se io non misuro la quantità di quell' aria compressa: ed a questa investigazione bisogna trovar regola, nella quale ho trovato di potere in due maniere procedere. L'una delle quali è di pigliar un altro simil fiasco pur come il primo strozzato, alla strozzatura del qual sia strettamente legato un altro ditale, che dall' altra sua testa abbracci l'animella dell' altro, e intorno a quella con saldissimo nodo sia legato. Questo secondo fiasco convien che nel fondo sia forato, in modo che per tal foro si possa mettere uno stile di ferro, col quale si possa, quando vorremo, aprir la detta animella per dar l'esito alla soverchia aria dell' altro vaso pesata ch' ella sia: ma dee questo secondo fiasco esser pieno d'acqua. Apparecchiato il tutto nella maniera detta, ed aprendo collo stile l'animella, l'aria uscendo con impeto, e passando nel vaso dell' acqua, la caccerà fuora pel foro del fondo; ed è manifesto, la quantità dell' acqua, che in tal guisa verrà cacciata, esser eguale alla mole, e quantità d'aria, che dall' altro vaso sarà uscita. Salvata dunque tale acqua,

e tornato a pesare il vaso alleggerito dell' aria compressa (il quale suppongo, che fusse pesato anche prima con detta aria sforzata) e detratto al modo già dichiarato l'arena superflua, è manifesto questa essere il giusto peso di tanta aria in mole, quanta è la mole dell' acqua scacciata e salvata; la quale peseremo, e vedremo quante volte il peso suo conterrà il peso della serbata arena; e senza errore potremo affermar tante volte esser più grave l'acqua dell' aria, la quale non sarà dieci volte altrimenti, come par che stimasse Aristotile, ma ben circa quattrocento, come tale esperienza ne mostra.

L'altro modo è più spedito, e puossi fare con un vaso solo, cioè col primo accomodato nel modo detto, nel quale non voglio, che mettiamo altra aria oltre a quella che naturalmente vi si ritrova, ma voglio che vi cacciamo dell' acqua senza lasciare uscir punto di aria, la quale dovendo cedere alla sopravvenente acqua, è forza, che si comprima. Spintavi dunque più acqua che sia possibile, che pure senza molta violenza vi se ne potrà mettere i tre quarti della tenuta dal fiasco, e mettasi sulla bilancia, e diligentissimamente si pesi, il che fatto tenendo il vaso col collo in su, si apra l' animella dando l'uscita all' aria, della quale ne scapperà fuora giustamente quanta è l' acqua contenuta nel fiasco. Uscita che sia l' aria, si torni a

mettere il vaso in bilancia, il quale per la partita dell'aria si troverà alleggerito; e detratto dal contrappeso il peso superfluo, da esso avremo la gravità di tant'aria, quant'è l'acqua del fiasco.

Simpl. Gli artifizj ritrovati da voi non si può dire, che non sieno sottili, e molto ingegnosi: ma mentre mi pare, che in apparenza dieno intera soddisfazione all'intelletto, mi mettono per un altro verso in confusione. Imperocchè essendo indubitabilmente vero, che gli elementi nelle proprie regioni non sono nè leggeri, nè gravi, non posso intendere, come, dove quella porzione d'aria, che parve pesasse, v. gr. quattro dramme di rena, debba poi realmente aver tal gravità nell'aria, nella quale ben la ritiene la rena, che la contrappesò; e però mi pare, che l'esperienza dovesse esser praticata non nell'elemento dell'aria, ma in un mezzo, dove l'aria stessa potesse esercitare il suo talento del peso, se ella veramente ne possiede.

Salv. Acuta certo è l'opposizione del Signor Simpl. e però è necessario, o che ella sia insolubile, o che la soluzione sia non men sottile. Che quell'aria, la quale compressa mostrò pesare quanto quella rena, posta in libertà nel suo elemento, non sia più per pesare, ma sibben la rena, è cosa chiarissima: e però per far tale esperienza conveniva eleggere un luogo, e un mezzo, dove l'aria non men che la rena

potesse gravitare; perchè, come più volte si è detto, il mezzo detrae dal peso d'ogni materia, che vi s'immerge, tanto quanto è il peso d'altrettanta parte dell'istesso mezzo, quanto è la mole immersa; sicchè l'aria all'aria leva tutta la gravità: l'operazione dunque acciò fusse fatta esattamente, converrebbe farla nel vacuo, dove ogni grave eserciterebbe il suo momento senza diminuzione alcuna. Quando dunque, Sig. Simpl. noi pesassimo una porzione d'aria nel vacuo, resterete allora sincerato e assicurato del fatto?

Simp. Veramente sì; ma questo è un desiderare o richiedere l'impossibile.

Salv. E però grandissimo converrà che sia l'obbligo, che mi dovrete, qual volta per amor vostro io effettui un impossibile; ma io non voglio vendervi quel che già vi ho donato, perchè di già nell'addotta esperienza pesiamo noi l'aria nel vacuo, e non nell'aria, o in altro mezzo pieno. Che alla mole, Sig. Simp. che nel mezzo fluido s'immerge, venga dall'istesso mezzo detratto della gravità, ciò proviene, perchè ei resiste all'essere aperto, discacciato, e finalmente sollevato; segno di che ne dà la prontezza sua nel ricorrer subito a riempir lo spazio, che l'immensa mole in lui occupava, qualunque volta essa ne parta: che quando di tale immersione ei nulla sentisse, niente opererebbe egli contro di quella. Ora ditemi, mentre che voi avete

in aria il fiasco di già pieno della medesima aria naturalmente contenutavi, qual divisione, scacciamento, o in sòmma qual mutazione riceva l'aria esterna ambiente dalla seconda aria, che nuovamente s' infonde con forza nel vaso. Forse s'ingrandisce il fiasco, onde l'ambiente debba maggiormente ritirarsi per cedergli luogo? certo no; e però possiam dire, che la seconda aria non s'immerge nell' ambiente, non vi occupando ella spazio, ma è come se si mettesse nel vacuo; anzi pur vi si mette ella realmente, e si trappone nei vacui non ben ripieni della prima aria non condensata. E veramente non so conoscere differenza nessuna tra due costituzioni d'ambiente, mentre in questa l'ambiente niente preme l'ambito, ed in quella l'ambito punto non ispigne contro all' ambiente: e tali sono la locazione di qualche materia nel vacuo, e la seconda aria compressa nel fiasco. Il peso dunque, che si trova in tal'aria condensata, è quello che ella avrebbe liberamente sparso nel vacuo. Ben è vero che 'l peso della rena che la contrappesò, come quella che era nell'aria libera, nel vacuo sarebbe stato un poco più del giusto; e però convien dire, che l'aria pesata sia veramente alquanto men grave della rena che la contrappesò, cioè tanto quanto peserebbe altrettanta aria nel vacuo.

Simpl. Pur mi pareva che nell'addotte esperienze vi fusse qualche cosa da desiderare; ma ora mi quieto interamente.

Salv. Le cose da me fin qui prodotte ed in particolare questa che la differenza di gravità, benchè grandissima, non abbia parte veruna nel diversificare le velocità dei mobili, sicchè per quanto da quella dipende tutti si moverebbero con egual celerità, è tanto nuova e nella prima apprensione remota dal verisimile, che quando non si avesse modo di dilucidarla, e renderla più chiara che 'l Sole, meglio sarebbe il tacerla che 'l pronunciarla; però già che me la sono lasciata scappar di bocca, convien che io non lasci indietro esperienza o ragione che possa corroborarla.

Sagr. Non questa sola, ma molte altre insieme delle vostre proposizioni son così remote dalle opinioni e dottrine comunemente ricevute, che spargendosi in pubblico vi conciterebbero numero grande di contradditori, essendo che l'innata condizione degli uomini non vede con buon occhio, che altri nel loro esercizio scuopra verità o falsità non scoperte da loro; e col dar titolo di innovatori di dottrine, poco grato agli orecchi di molti, s'ingegnano di tagliar quei nodi che non possono sciorre, e con mine sotterranee dissipar quegli edifizj che sono stati con gli strumenti consueti da pazienti artefici costrutti: ma con esso noi lontani da simili pretensioni l'esperienze vostre e le ragioni bastano a

quietarci: tuttavia quando abbiate altre più palpabili esperienze e ragioni più efficaci, le sentiremo molto volentieri.

Salv. L'esperienza fatta con due mobili quanto più si possa differenti di peso col fargli scendere da un' altezza per osservare se la velocità loro sia eguale, patisce qualche difficoltà, imperocchè se l'altezza sarà grande, il mezzo che dall' impeto del cadente dee essere aperto e lateralmente spinto, di molto maggior pregiudizio sarà al piccol momento del mobile leggerissimo, che alla violenza del gravissimo, per lo che per lungo spazio il leggero rimarrà indietro; e nell' altezza piccola si potrebbe dubitare, se veramente non vi fusse differenza, o pur se ve ne fusse, ma inosservabile. E però sono andato pensando di reiterar tante volte la scesa da piccole altezze, ed accumulare insieme tante di quelle minime differenze di tempo che potessero intercedere tra l'arrivo al termine del grave, e l'arrivo del leggero, che così congiunte facessero un tempo non solo osservabile, ma grandemente osservabile. In oltre per potermi prevalere di moti quanto si possa tardi, nei quali manco lavora la resistenza del mezzo in alterar l'effetto che dipende dalla semplice gravità, sono andato pensando di fare scendere i mobili sopra un piano declive non molto elevato sopra l'orizzontale, che sopra questo non meno che nel perpendicolo potrà scor-

gersi quello che facciano i gravi differenti di peso, e passando più avanti ho anco voluto liberarmi da qualche impedimento che potesse nascer dal contatto di essi mobili sul detto piano declive; e finalmente ho preso due palle, una di piombo, e una di sughero, quella ben più di cento volte più grave di questa, e ciascheduna di loro ho attaccata a due sottili spaghetti eguali lunghi quattro o cinque braccia legati ad alto, allontanata poi l'una e l'altra palla dallo stato perpendicolare gli ho dato l'andare nell' istesso momento, ed esse scendendo per le circonferenze di cerchi descritti dagli spaghi eguali lor semidiametri, e passate oltre al perpendicolo, son poi per le medesime strade ritornate indietro, e reiterando ben cento volte per lor medesime le andate e le tornate hanno sensatamente mostrato, come la grave va talmente sotto il tempo della leggera, che nè in ben cento vibrazioni, nè in mille anticipa il tempo d'un minimo momento; ma camminano con passo egualissimo. Scorgesi anco l'operazione del mezzo, il quale arrecando qualche impedimento al moto assai più diminuisce le vibrazioni del sughero, che quelle del piombo, ma non però che le renda più o meno frequenti, anzi quando gli archi passati dal sughero non fussero più che di cinque o sei gradi, e quei del piombo cinquanta o sessanta, son eglino passati sotto i medesimi tempi.

Simpl. Se questo è, come dunque non sarà la velocità del piombo maggiore della velocità del sughero? facendo quello sessanta gradi di viaggio nel tempo che questo ne passa appena sei.

Salv. Ma che direste, Sig. Simp. quando amendue spedissero nell' istesso tempo i loro viaggi, mentre il sughero allontanato dal perpendicolo trenta gradi avesse a passar l'arco di sessanta, e il piombo slargato dal medesimo punto di mezzo due soli gradi scorresse l'arco di quattro? non sarebbe allora altrettanto più veloce il sughero? e pur l'esperienza mostra ciò avvenire; però notate. Slargato il pendolo del piombo, v. g. cinquanta gradi dal perpendicolo, e di lì lasciato in libertà scorre, e passando oltre al perpendicolo quasi altri cinquanta descrive l'arco di quasi cento gradi, e ritornando per se stesso indietro descrive un altro minore arco, e continuando le sue vibrazioni dopo gran numero di quelle si riduce finalmente alla quiete. Ciascheduna di tali vibrazioni si fa sotto tempi eguali tanto quella di novanta gradi, quanto quella di cinquanta, o di venti, di dieci, di quattro: sicchè in conseguenza la velocità del mobile vien sempre languendo, poichè sotto tempi eguali va passando successivamente archi sempre minori, e minori. Un simile, anzi l' istesso effetto fa il sughero pendente da un filo altrettanto lungo, salvo che in minor numero di vi-

brazioni si conduce alla quiete, come meno atto mediante la sua leggerezza a superar l'ostacolo dell' aria: con tutto ciò tutte le vibrazioni grandi e piccole si fanno sotto tempi eguali tra di loro, ed eguali ancora ai tempi delle vibrazioni del piombo. Onde è vero, che se mentre il piombo passa un arco di cinquanta gradi, il sughero ne passa uno di dieci, il sughero allora è più tardo del piombo; ma accaderà ancora all' incontro che 'l sughero passi l'arco di cinquanta, quando il piombo passi quel di dieci, o di sei, e così in diversi tempi or sarà più veloce il piombo, ed ora il sughero; ma se gli stessi mobili passeranno ancora sotto i medesimi tempi eguali archi eguali, ben sicuramente si potrà dire allora essere le velocità loro eguali.

Simp. Mi pare e non mi pare che questo discorso sia concludente, e mi sento nella mente una tal qual confusione, che mi nasce dal muoversi e l'uno e l'altro mobile or veloce, or tardo, ed or tardissimo, che non mi lascia ridurre in chiaro come vero sia, che le velocità loro sian sempre eguali.

Sagr. Concedami in grazia, Sig. Salv. che io dica due parole. E ditemi, Sig. Simp. se voi ammettete che dir si possa con assoluta verità, le velocità del sughero e del piombo essere eguali, ogni volta che partendosi amendue nell' istesso momento dalla quiete e movendosi per le medesime incli-

nazioni passassero sempre spazj eguali in tempi eguali?

Simp. In questo non si può dubitare, nè se gli può contraddire.

Sagr. Accade ora nei pendoli, che ciascheduu di loro passi or sessanta gradi, or cinquanta, or trenta, or dieci, or otto, quattro, due, e quando amendue passano l'arco di sessanta gradi, lo passano nell' istesso tempo: nell' arco di cinquanta metton l' istesso tempo l'uno che l'altro mobile: così nell' arco di trenta, di dieci, e degli altri; e però si conclude che la velocità del piombo nell' arco di sessanta gradi è eguale alla velocità del sughero nell'arco medesimo di sessanta: e che le velocità nell'arco di cinquanta son pur tra loro eguali, e così negli altri. Ma non si dice già, che la velocità che si esercita nell' arco di sessanta, sia eguale alla velocità che si esercita nell'arco di cinquanta, nè questa a quella dell'arco di trenta, ma son sempre minori le velocità negli archi minori: il che si raccoglie dal veder noi sensatamente il medesimo mobile metter tanto tempo nel passar l'arco grande dei sessanta gradi, quanto nel passare il minor di cinquanta, o il minimo di dieci, ed in somma nell' esser passati tutti sempre sotto tempi eguali. È vero dunque che ben vanno e il piombo e il sughero ritardando il moto secondo la diminuzione degli archi, ma non però alterano la concordia loro nel mantener l' egualità

della velocità in tutti i medesimi archi da loro passati. Ho voluto dir questo più per sentire se ho ben capito il concetto del Sig. Salv. che per bisogno che io credessi che avesse il Sig. Simpl. di più chiara esplicazione di quella del Sig. Salv. che è, come in tutte le sue cose, lucidissima e tale, che sciogliendo egli il più delle volte questioni non solo in apparenza oscure, ma repugnanti alla natura ed al vero, con ragioni o osservazioni o esperienze tritissime e famigliari ad ogni uno, ha (come da diversi ho inteso) dato occasione a tale uno dei professori più stimati di far minor conto delle sue novità, tenendole come a vile, per dipendere da troppo bassi e popolari fondamenti, quasi che la più ammirabile e più da stimarsi condizione delle scienze dimostrative non sia lo scaturire e pullulare da principj notissimi, intesi e conceduti da tutti. Ma seguitiamo pur noi di andarci pascendo di questi cibi leggeri; e posto che il Sig. Simp. sia restato appagato nell'intender ed ammettere, come l'interna gravità dei diversi mobili non abbia parte alcuna nel diversificar le velocità loro, sicchè tutti, per quanto da quella dipende, si moverebber coll'istesse velocitadi; diteci, Sig. Salv. in quello che voi riponete le sensate ed apparenti disegualità di moto; e rispondete a quell'instanza che oppone il Sig. Simp. e che io parimente confermo,

dico del vedersi non solamente una palla di artiglieria muoversi più velocemente di una migliarola di piombo, che poca sarà la differenza di velocità rispetto a quella che vi oppongo io di mobili dell' istessa materia, dei quali alcuni dei maggiori scenderanno in meno di una battuta di polso in un mezzo quello spazio, che altri minori non lo passeranno in un' ora, nè in quattro, nè in venti, quali sono le pietre e la minuta rena e massime quella sottilissima, che intorbida l'acqua, nel qual mezzo in molte ore non iscende per due braccia, che pietruzze non molto grandi passano in una battuta di polso.

Salv. Quel che operi il mezzo nel ritardar più i mobili, secondo che tra di loro sono in ispecie men gravi, già si è dichiarato, mostrando ciò accadere dalla suttrazione di peso. Ma come il medesimo mezzo possa con sì gran differenza scemar la velocità nei mobili differenti solo in grandezza, ancorchè sieno della medesima materia e dell' istessa figura, ricerca per sua dichiarazione discorso più sottile di quello che basta per intender, come la figura del mobile più dilatata, o il moto del mezzo che sia fatto contro al mobile, ritarda la velocità di quello. Io del presente problema riduco la cagione alla scabrosità e porosità che comunemente, e per lo più necessariamente, si ritrova nelle superficie dei corpi solidi, le quali scabro-

sità nel moto di essi vanno urtando nell'aria, o altro mezzo ambiente; di che segno evidente ce ne porge il sentir noi ronzare i corpi, ancorchè quanto più si possa rotondati, mentre velocissimamente scorrono per l'aria, e non solo ronzare, ma sibilare, e fischiar si sentono se qualche più notabil cavità o prominenza sarà in essi. Vedesi anco nel girar sopra il torno ogni solido rotondo fare un poco di vento. Ma che più? non sentiam noi notabil ronzio, ed in tuono molto acuto farsi dalla trottola, mentre per terra con somma celerità va girando? l'acutezza del qual sibilo si va ingravendo, secondo che la velocità della vertigine va di grado in grado languendo: argomento parimente necessario degl' intoppi nell' aria delle scabrosità benchè minime delle superficie loro. Queste non si può dubitare che nello scendere i mobili, soffregandosi coll'ambiente fluido, apporteranno ritardamento alla velocità, e tanto maggiore, quanto la superficie sarà più grande, quale è quella dei solidi minori paragonati ai maggiori.

Simpl. Fermate in grazia, perchè qui comincio a confondermi: imperocchè sebbene io intendo ed ammetto che la confricazione del mezzo colla superficie del mobile ritardi il moto, e che più lo ritardi, dove ceteris paribus la superficie sia maggiore, non capisco però con qual fondamento voi chiamate maggiore la superficie

dei solidi minori: ed oltre a ciò, se come voi affermate, la maggior superficie dee arrecar maggior ritardamento, i solidi maggiori devriano esser più tardi, il che non è: ma questa instanza facilmente si toglie così dire, che sebbene il maggiore ha maggior superficie, ha anco maggior gravità, contro la quale l'impedimento della maggior superficie non ha a prevalere all'impedimento della superficie minore contro alla minor gravità, sicchè la velocità del solido maggiore ne divenga minore. E però non vedo ragione per la quale si debba alterare l'egualità delle velocità, mentre che quanto si diminuisce la gravità movente, altrettanto si diminuisce la facoltà della superficie ritardante.

Salv. Risolverò congiuntamente tutto quello che opponete. Per tanto voi, Sig. Simpl. senza controversia ammettete, che quando di due mobili eguali della stessa materia, e simili di figura (i quali indubitabilmente si moverebber egualmente veloci) all'uno di loro si diminuisse tanto la gravità quanto la superficie (ritenendo però la similitudine della figura), non perciò si scemerebbe la velocità nel rimpiccolito.

Simpl. Veramente parmi che così dovrebbe seguire, stando però nella nostra dottrina, che vuol che la maggior o minor gravità non abbia azione nell'accelerare o ritardare il moto.

Salv. E questo confermo io, e vi ammetto anco il vostro detto dal qual mi par che in conseguenza si ritragga, che quando la gravità si diminuisse più che la superficie, nel mobile in tal maniera diminuito si introdurrebbe qualche ritardamento di moto, e maggiore, e maggiore, quanto a proporzione maggior fusse la diminuzion del peso, che la diminuzion della superficie.

Simp. In ciò non ho io repugnanza veruna.

Salv. Or sappiate, Sig. Simplicio, che non si può nei solidi diminuir tanto la superficie, quanto il peso, mantenendo la similitudine delle figure. Imperocchè essendo manifesto che nel diminuir un solido grave tanto scema il suo peso quanto la mole, ogni volta che la mole venisse sempre diminuita più che la superficie (nel conservarsi massime la similitudine di figura) la gravità ancora più che la superficie verrebbe diminuita. Ma la Geometria c' insegna, che molto maggior proporzione è tra la mole, e la mole nei solidi simili, che tra le loro superficie. Il che per vostra maggior intelligenza vi esplicherò in qualche caso particolare. Però figuratevi per esempio un dado, un lato del quale sia v. gr. lungo due dita, sicchè una delle sue faccie sarà quattro dita quadre, e tutte e sei, cioè tutta la sua superficie, ventiquattro dita quadre. Intendete poi il medesimo dado esser con tre tagli segato in otto piccoli dadi, il lato di

ciascun de' quali sarà un dito, e una sua faccia un dito quadro, e tutta la sua superficie sei dita quadre, delle quali l'intero dado ne conteneva ventiquattro in superficie. Or vedete come la superficie del piccol dado è la quarta parte della superficie del grande (che tanto è sei di ventiquattro) ma l'istesso dado solido è solamente l'ottava; molto più dunque cala la mole, ed in conseguenza il peso, che la superficie. E se voi suddividerete il piccol dado in altri otto, avremo per l'intera superficie di un di questi un dito e mezzo quadro, che è la sedicesima parte della superficie del primo dado; ma la sua mole è solamente la sessantaquattresima. Vedete per tanto, come in queste sole due divisioni le moli scemano quattro volte più, che le loro superficie, e se noi andremo seguitando la suddivisione, sino che si riduca il primo solido in una minuta polvere, troveremo la gravità dei minimi atomi diminuita centinaja e centinaja di volte più, che le loro superficie. E questo, che vi ho esemplificato nei cubi, accade in tutti i solidi simili, le moli dei quali sono in sesquialtera proporzione delle lor superficie. Vedete dunque con quanta maggior proporzione cresce l'impedimento del contatto della superficie del mobile col mezzo dei mobili piccoli, che nei maggiori; e se noi aggiugneremo, che le scabrosità nelle

superficie piccolissime delle polveri sottili non son forse minori di quelle delle superficie dei solidi maggiori, che sieno con diligenza puliti, guardate quanto bisognerà, che il mezzo sia fluido, e privo onninamente di resistenza all'esser aperto per dover cedere il passo a così debil virtù. E in tanto notate, Sig. Simp. che io non equivocai, quando poco fa dissi, la superficie de' solidi minori esser grande in comparazione di quella dei maggiori.

Simp. Io resto interamente appagato; e mi credano certo, che se io avessi a ricominciare i miei studj, vorrei seguire il consiglio di Platone, e comincerei dalle Matematiche, le quali vedo, che procedono molto scrupolosamente, nè vogliono ammetter per sicuro fuor che quello, che concludentemente dimostrano.

Sagr. Ho avuto gusto grande in questo discorso; ma prima che passiamo più avanti, avrei caro di restar capace di un termine, che mi giunse nuovo, quando pure ora diceste, che i solidi simili son tra di loro in sesquialtera proporzione delle lor superficie, perchè ho ben veduto, e inteso la proposizione colla sua dimostrazione, nella quale si prova le superficie de' solidi simili essere in duplicata proporzione dei loro lati, e l'altra, che prova i medesimi solidi essere in tripla proporzione dei medesimi lati, ma la proporzione dei solidi colle lor superficie non mi

sovvien nè anco di averla sentita nominare.

Salv. V. S. medesima da per se si risponde, e dichiara il dubbio. Imperocchè quello, che è triplo di una cosa, della quale un altro è doppio, non viene egli ad esser sesquialtero di questo doppio? certo sì. Or se le superficie sono in doppia proporzione delle linee, delle quali i solidi sono in proporzione tripla, non possiam noi dire i solidi essere in sesquialtera proporzion delle superficie?

Sagr. Ho inteso benissimo. E sebbene alcuni altri particolari attenenti alla materia, di cui si tratta, mi resterebbero da domandare, tuttavia quando ce ne andassimo così di digressione in digressione, tardi verremmo alle quistioni principalmente intese, che appartengono alle diversità degli accidenti delle resistenze dei solidi all'esser spezzati; e però quando così piaccia loro, potremo ritornare sul primo filo, che si propose da principio.

Salv. V. S. dice molto bene, ma le cose tante, e tanto varie, che si sono esaminate, ci han rubato tanto tempo, chè poco ce ne avanzerà per questo giorno da spendere nell'altro nostro principale argomento, che è pieno di dimostrazioni Geometriche da esser con attenzione considerate; onde stimerei, che fosse meglio differire il congresso a dimane, sì per questo, che ho detto, come ancora perchè

potrei portar meco alcuni fogli, dove ho per ordine notati i Teoremi, e i Problemi, nei quali si propongono, e dimostrano le diverse passioni di tal soggetto, che forse alla memoria col necessario metodo non mi sovverrebbero.

Sagr. Io molto bene mi accomodo a questo consiglio, e tanto più volentieri, quanto che per finire la sessione odierna avrò tempo di sentir la dichiarazione di alcuni dubbj, che mi restavano nella materia, che ultimamente trattavamo. Dei quali uno è, se si dee stimare, che l'impedimento del mezzo possa esser bastante a por termine all'accelerazione a' corpi di materia gravissima, grandissimi di mole, e di figura sferica; e dico sferica, per pigliar quella, che è contenuta sotto la minima superficie, e però meno soggetta al ritardamento. Un altro sarà circa le vibrazioni dei pendoli, e questo ha più capi: l'uno sarà se tutte, e grandi, e mediocri, e minime si fanno veramente, e precisamente sotto tempi eguali: ed un altro, qual sia la proporzione dei tempi dei mobili appesi a fili diseguali, dei tempi, dico, delle lor vibrazioni.

Salv. I quesiti son belli, e siccome avviene di tutti i veri, dubito, che trattandosi di qualsisia di loro si tirerà dietro tante altre vere, e curiose conseguenze, che non so, se l'avanzo di questo giorno ci basterà per discuterle tutte.

Sagr. Se elle saranno del sapore delle passate, più grato mi sarebbe l' impiegarmi tanti giorni, non che tante ore, quante restano sino a notte, e credo, che il Sig. Simplicio non si ristuccherà di tali ragionamenti.

Simpl. Sicuramente no, e massime quando si trattano quistioni naturali, intorno alle quali non si leggono opinioni, o discorsi di altri Filosofi.

Salv. Vengo dunque alla prima, affermando senza veruna dubitazione, non essere sfera sì grande, nè di materia sì grave, che la renitenza del mezzo, ancorchè tenuissimo, non raffreni la sua accelerazione, e che nella continuazion del moto non lo riduca all' equabilità, di che possiamo ritrar molto chiaro argomento dall' esperienza stessa. Imperocchè se alcun mobile cadente fosse abile nella sua continuazion di moto ad acquistar qualsivoglia grado di velocità, nessuna velocità, che da motore esterno gli fusse conferita, potrebbe esser così grande, che egli la ricusasse e se ne spogliasse mercè dell' impedimento del mezzo. E così una palla di artiglieria, che fosse scesa per aria, v. gr. quattro braccia, ed avesse per esempio acquistato dieci gradi di velocità, e che con questi entrasse nell' acqua, quando l' impedimento dell' acqua non fosse potente a vietare alla palla un tale impeto, ella l' accrescerebbe, o almeno lo continuerebbe sino al fondo, il che non si vede

seguire, anzi l'acqua, benchè non fosse più che poche braccia profonda, l'impedisce, e debilita in modo, che leggerissima percossa farà nel letto del fiume, o del lago. È dunque manifesto, che quella velocità, della quale l'acqua l'ha potuta spogliare in un brevissimo viaggio, non glie lo lascerebbe giammai acquistare anco nella profondità di mille braccia. E perchè permettergli il guadagnarsela in mille, per levargliela poi in quattro braccia? Ma che più? non si vede egli l'immenso impeto della palla cacciata dall' istessa artiglieria esser talmente rintuzzato dall' interposizione di pochissime braccia di acqua, che senza veruna offesa della nave appena si conduce a percuoterla? L'aria ancora, benchè cedentissima, pur reprime la velocità del mobile cadente ancor molto grave, come possiamo con simili esperienze comprendere; perchè se dalla cima di una torre molto alta tireremo una archibusata in giù, questa farà minor botta in terra, che se scaricheremo l'archibuso alto dal piano solamente quattro, o sei braccia, segno evidente, che l'impeto, con che la palla uscì della canna scaricata nella sommità della torre, andò diminuendosi nello scender per aria; adunque lo scender da qualunque grandissima altezza non basterà per fargli acquistare quell'impeto, del quale la resistenza dell'aria la priva, quando già in qualsivoglia modo gli sia

stato conferito. La rovina parimente, che farà in una muraglia un colpo di una palla cacciata da una colubrina dalla lontananza di venti braccia, non credo io, che la facesse venendo a perpendicolo da qualsivoglia altezza immensa. Stimo pertanto esser termine all' accelerazione di qualsivoglia mobile naturale, che dalla quiete si parta, e che l' impedimento del mezzo finalmente lo riduca all' egualità, nella quale ben poi sempre si mantenga.

Sagr. L' esperienze veramente mi par che sieno molto a proposito; nè ci è altro, se non che l' avversario potrebbe farsi forte col negar, che si debbono verificar nelle moli grandissime, e gravissime, e che una palla di artiglieria venendo dal concavo della Luna, o anco dalla suprema region dell' aria farebbe percossa maggiore, che uscita dal cannone.

Salv. Non è dubbio, che molte cose si possono opporre, e che non tutte si possono con esperienza redarguire, tuttavia in questa contraddizione alcuna cosa par, che si possa mettere in considerazione; cioè, che molto ha del verisimile, che il grave cadente da un' altezza acquisti tanto d' impeto nell' arrivare in terra, quanto fosse bastante a tirarlo a quell' altezza, come chiaramente si vede in un pendolo assai grave, che slargato cinquanta, o sessanta gradi dal perpendicolo guadagna quella velocità, e virtù, che basta

precisamente a sospignerlo ad altrettanta elevazione, trattone però quel poco, che gli vien tolto dall'impedimento dell'aria. Per costituir dunque la palla dell'artiglieria in tanta altezza, che bastasse per l'acquisto di tanto impeto, quanto è quello, che gli dà il fuoco nell'uscir del Pezzo, dovrebbe bastare il tirarla in su a perpendicolo coll'istessa artiglieria, osservando poi se nella ricaduta ella facesse colpo eguale a quello della percossa fatta da vicino nell'uscire; che credo veramente che non sarebbe a gran segno tanto gagliardo. E però stimo, che la velocità, che ha la palla vicino all'uscita del Pezzo, sarebbe di quelle, che l'impedimento dell'aria non gli lascerebbe conseguire giammai, mentre con moto naturale scendesse partendosi dalla quiete da qualsivoglia grand'altezza. Vengo ora agli altri quesiti attenenti ai pendoli, materia che a molti parrebbe assai arida, e massime a quei Filosofi, che stanno continuamente occupati nelle più profonde questioni delle cose naturali, tuttavia non gli voglio disprezzare, inanimito dall'esempio d'Aristotile medesimo, nel quale io ammiro sopra tutte le cose il non aver egli lasciato, si può dir, materia alcuna degna in qualche modo di considerazione, che e' non abbia toccata: ed ora dai quesiti di V. S. penso, che potrò dirvi qualche mio pensiero sopra alcuni problemi attenenti alla

musica, materia nobilissima, della quale hanno scritto tanti grand' uomini, e l' istesso Aristotile, e circa di essa considera molti problemi curiosi, talchè se io ancora da così facili, e sensate esperienze trarrò ragioni di accidenti maravigliosi in materia dei suoni, posso sperare, che i miei ragionamenti siano per esser graditi da voi.

Sagr. Non solamente graditi, ma da me in particolare sommamente desiderati, come quello che sendomi dilettato di tutti gli strumenti musici, ed assai filosofato intorno alle consonanze, son sempre restato incapace, e perplesso, onde avvenga, che più mi piaccia, e diletti questa, che quella, e che alcuna non solo non mi diletti, ma sommamente mi offenda. Il problema poi trito delle due corde tese all' unisono, che al suono dell' una l'altra si muova, e attualmente risuoni, mi resta ancora irresoluto, come anco non ben chiare le forme delle consonanze, ed altre particolarità.

Salv. Vedremo, se da questi nostri pendoli si possa cavare qualche soddisfazione a tutte queste difficoltà. E quanto al primo dubbio, che è, se veramente, e puntualissimamente l' istesso pendolo fa tutte le sue vibrazioni massime, mediocri, e minime sotto tempi precisamente uguali, io mi rimetto a quello, che intesi già dal nostro Accademico, il quale dimostra be-

ne, che il mobile, che discendesse per le corde suttese a qualsivoglia arco, le passerebbe necessariamente tutte in tempi eguali tanto la suttesa sotto cent' ottanta gradi (cioè tutto il diametro) quanto le suttese di cento, di sessanta, di due, di mezzo, e di quattro minuti: intendendo che tutte vadano a terminar nell' infimo punto toccante il piano orizzontale. Circa poi i discendenti per gli archi delle medesime corde elevati sopra l' orizzonte, e che non sieno maggiori d' una quarta, cioè, di novanta gradi, mostra parimente l' esperienza passarsi tutti in tempi eguali, ma però più brevi dei tempi de' passaggi per le corde; effetto che in tanto ha del maraviglioso, in quanto nella prima apprensione par che dovrebbe seguire il contrario. Imperocchè sendo comuni i termini del principio, e del fine del moto, ed essendo la linea retta la brevissima, che tra i medesimi termini si comprende, par ragionevole, che il moto fatto per lei s' avesse a spedire nel più breve tempo, il che poi non è: ma il tempo brevissimo, ed in conseguenza il moto velocissimo è quello, che si fa per l' arco, del quale essa linea retta è corda. Quanto poi alla proporzione dei tempi delle vibrazioni di mobili pendenti da fila di differente lunghezza, sono essi tempi in proporzione sudduplа delle lunghezze delle fila, o vogliamo dire le lunghezze essere in dupli-

cata proporzion dei tempi, cioè, son come i quadrati dei tempi: sicchè volendo v. gr. che 'l tempo d'una vibrazione d'un pendolo sia doppio del tempo d'una vibrazione d'un altro, bisogna, che la lunghezza della corda di quello sia quadrupla della lunghezza della corda di questo. Ed allora nel tempo d'una vibrazione di quello, un altro ne farà tre, quando la corda di quello sarà nove volte più lunga dell'altra. Dal che ne seguita, che le lunghezze delle corde hanno fra di loro la proporzione, che hanno i quadrati de'numeri delle vibrazioni, che si fanno nel medesimo tempo.

Sagr. Adunque se io ho bene inteso, potrò speditamente sapere la lunghezza di una corda pendente da qualsivoglia grandissima altezza, quando bene il termine sublime dell'attaccatura mi fosse invisibile, e solo si vedesse l'altro estremo basso. Imperocchè se io attaccherò qui da basso uno assai grave peso a detta corda, e farò che si vada vibrando in qua, e in là, e che un amico vada numerando alcune delle sue vibrazioni, e che io nell'istesso tempo vada parimente contando le vibrazioni, che farà un altro mobile appeso a un filo di lunghezza precisamente d'un braccio, dai numeri delle vibrazioni di questi pendoli, fatte nell'istesso tempo, troverò la lunghezza della corda, come per esempio ponghiamo, che nel tempo, che

l'amico mio abbia contate venti vibrazioni della corda lunga, io ne abbia contate dugenquaranta del mio filo, che è lungo un braccio, fatto i quadrati delli due numeri venti, e dugenquaranta, che sono 400. 57600 dirò la lunga corda contener 57600 misure di quelle, che il mio filo ne contien 400; e perchè il filo è un sol braccio, partirò 57600 per 400, che ne viene 144, e 144 braccia dirò esser lunga quella corda.

Salv. Nè v' ingannerete d' un palmo, e massime se piglierete moltitudini grandi di vibrazioni.

Sagr. V. S. mi dà pur frequentemente occasione d' ammirare la ricchezza, ed insieme la somma liberalità della natura; mentre da cose tanto comuni, e direi anco in certo modo vili, ne andate traendo notizie molto curiose, e nuove, e bene spesso remote da ogni immaginazione. Io ho ben mille volte posto cura alle vibrazioni in particolare delle lampade pendenti in alcune Chiese da lunghissime corde, inavvertentemente state mosse da alcuno, ma il più che io cavassi da tale osservazione fu l' improbabilità dell' opinione di quelli, che vogliono, che simili moti vengano mantenuti, e continuati dal mezzo, cioè dall' aria; perchè mi parrebbe bene, che l' aria avesse un gran giudizio, ed insieme una poca faccenda a consumar le ore, e le ore di tempo in sospignere con tanta regola in qua, e in là un peso pendente:

ma che io fossi per apprenderne, che quel mobile medesimo appeso a una corda di cento braccia di lunghezza, slontanato dall' imo punto una volta novanta gradi, ed un' altra un grado solo, o mezzo, tanto tempo spendesse in passar questo minimo, quanto in passar quel massimo arco, certo non credo, che mai l'avrei incontrato, che ancora ancora mi par, che tenga dell'impossibile. Ora sto aspettando di sentire, che queste medesime semplicissime minuzie mi assegnino ragioni tali di quei problemi musici, che mi possano almeno in parte quietar la mente.

Salv. Prima d'ogni altra cosa bisogna avvertire, che ciaschedun pendolo ha il tempo delle sue vibrazioni talmente limitato, e prefisso, che impossibil cosa è il farlo muovere sotto altro periodo, che l'unico suo naturale. Prenda pur chi si voglia in mano la corda, ond è attaccato il peso, e tenti quanto gli piace d' accrescergli, o scemargli la frequenza delle sue vibrazioni, sarà fatica buttata in vano; ma ben all'incontro ad un pendolo, ancorchè grave, e posto in quiete, col solo soffiarvi dentro conferiremo noi moto, e moto anche assai grande col reiterare i soffi, ma sotto il tempo, che è proprio quel delle sue vibrazioni; che se al primo soffio l'avremo rimosso dal perpendicolo mezzo dito, aggiugnendogli il secondo dopo che sendo ritornato verso noi comincerebbe la seconda

vibrazione, gli conferiremo nuovo moto, e così successivamente con altri soffi, ma dati a tempo, e non quando il pendolo ci viene incontro (che così gl' impediremo, e non ajuteremo il moto) e seguendo con molti impulsi gli conferiremo impeto tale, che maggior forza assai, che quella d' un soffio ci bisognerà a cessarlo.

Sagr. Ho da fanciullo osservato con questi impulsi dati a tempo un uomo solo far suonare una grossissima campana, e nel volerla poi fermare attaccarsi alla corda quattro, o sei altri, e tutti esser levati in alto, nè poter tanti insieme arrestar quell' impeto, che un solo con regolati tratti gli aveva conferito.

Salv. Esempio, che dichiara il mio intento non meno acconciamente di quel, che questa mia premessa si accomodi a render la ragione del maraviglioso problema della corda della Cetera, o del Cimbalo, che muove, e fa realmente suonare quella non solo, che all' unisono gli è concorde, ma anco all' ottava, e alla quinta. Toccata la corda comincia, e continua le sue vibrazioni per tutto il tempo, che si sente durar la sua risonanza: queste vibrazioni fanno vibrare, e tremare l' aria, che gli è appresso, i cui tremori, e increspamenti si distendono per grande spazio, e vanno a urtare in tutte le corde del medesimo strumento, ed anco di altri vicini: la corda, che è tesa all' unisono colla tocca, essendo disposta a far

le sue vibrazioni sotto il medesimo tempo; comincia al primo impulso a muoversi un poco, e sopraggiugnendogli il secondo, il terzo, il ventesimo, e più altri, e tutti negli aggiustati, e periodici tempi, riceve finalmente il medesimo tremore, che la prima tocca, e si vede chiarissimamente andar dilatando le sue vibrazioni giusto allo spazio della sua motrice. Quest'ondeggiamento, che si va distendendo per l'aria, muove e fa vibrare non solamente le corde, ma qualsivoglia altro corpo disposto a tremare, e vibrarsi sotto quel tempo della tremante corda: sicchè se si ficcheranno nelle sponde dello strumento diversi pezzetti di setole, o di altre materie flessibili, si vedrà nel suonare il Cimbalo tremare or questo, or quel corpuscolo, secondo che verrà toccata quella corda, le cui vibrazioni van sotto 'l medesimo tempo: gli altri non si muoveranno al suono di questa corda, nè quello tremerà al suono d'altra corda. Se coll'archetto si toccherà gagliardamente una corda grossa d'una Viola, appressandogli un bicchiere di vetro sottile, e pulito, quando il tuono della corda sia all'unisono del tuono del bicchiere, questo tremerà, e sensatamente risuonerà. Il diffondersi poi amplamente l'increspamento del mezzo intorno al corpo risuonante, apertamente si vede nel far suonare il bicchiere, dentro il quale sia dell'acqua, fregando il pol-

pastrello del dito sopra l'orlo; imperocchè l'acqua contenuta con regolatissimo ordine si vede andare ondeggiando, e meglio ancora si vedrà l'istesso effetto fermando il piede dal bicchiere nel fondo di qualche vaso assai largo, nel quale sia dell' acqua sin presso all' orlo del bicchiere, che parimente facendolo risuonare colla confricazione del dito, si vedranno gl' increspamenti nell'acqua regolatisssimi, e con gran velocità spargersi in gran distanza intorno al bicchiere, ed io più volte mi sono incontrato, nel fare al modo detto suonare un bicchiere assai grande, e quasi pieno d' acqua, a veder prima le onde nell' acqua con estrema egualità formate; ed accadendo talvolta, che il tuono del bicchiere salti un' ottava più alto, nell' istesso momento ho visto ciascheduna delle dette onde dividersi in due: accidente che molto chiaramente conclude la forma dell' ottava esser la dupla.

Sagr. A me ancora è intervenuto l'istesso più d' una volta con mio diletto, ed anco utile; imperocchè stetti lungo tempo perplesso intorno a queste forme delle consonanze, non mi parendo, che la ragione, che comunemente se n'adduce dagli autori, che sin qui hanno scritto dottamente della musica, fusse concludente a bastanza. Dicono essi la Diapason, cioè l' ottava esser contenuta dalla dupla, la Diapente, che noi diciamo la quinta, dalla sesquial-

tera, perchè distesa sopra il Monocordo una corda, sonandola tutta, e poi sonandone la metà col mettere un ponticello in mezzo, si sente l'ottava, e se il ponticello si metterà al terzo di tutta la corda, toccando l'intera, e poi li due terzi ci rende la quinta, per lo che l'ottava dicono esser contenuta tra 'l due, e l'uno, e la quinta tra li tre, e 'l dua. Questa ragione, dico, non mi pareva concludente per poter assegnare juridicamente la dupla, e la sesquialtera per forme naturali della Diapason, e della Diapente. E 'l mio motivo era tale. Tre sono le maniere, colle quali noi possiamo inacutire il tuono a una corda, l'una è lo scorciarla, l'altra il tenderla più, o vogliam dir tirarla, il terzo è l'assottigliarla. Ritenendo la medesima tiratezza, e grossezza della corda, se vorremo sentir l'ottava, bisogna scorciarla la metà, cioè toccarla tutta, e poi mezza. Ma se ritenendo la medesima lunghezza, e grossezza vorremo farla montare all'ottava col tirarla più, non basta tirarla il doppio più, ma ci bisogna il quadruplo, sicchè se prima era tirata dal peso d'una libbra, converrà attaccarvene quattro per inacutirla all'ottava. E finalmente se stante la medesima lunghezza, e tiratezza, vorremo una corda, che per esser più sottile renda l'ottava, sarà necessario, che ritenga solo la quarta parte della grossezza dell'altra più grave. E questo, che dico

dell' ottava, cioè che la sua forma presa dalla tensione, o dalla grossezza della corda è in duplicata proporzione di quella, che si ha dalla lunghezza, intendasi di tutti gli altri intervalli musici, imperocchè quello, che ci dà la lunghezza colla proporzion sesquialtera, cioè col suonarla tutta, e poi li due terzi, volendolo cavar dalla tiratezza, o dalla sottigliezza, bisogna duplicar la proporzione sesquialtera pigliando la dupla sesquiquarta, e se la corda grave era tesa da quattro libbre di peso, attaccarne all' acuta non sei, ma nove, e quanto alla grossezza, far la corda grave più grossa dell' acuta secondo la proporzione di nove a quattro per aver la quinta. Stante queste verissime esperienze, non mi pareva scorger ragione alcuna, per la quale avessero i sagaci Filosofi a stabilir la forma dell' ottava esser più la dupla, che la quadrupla, e della quinta più la sesquialtera, che la dupla sesquiquarta. Ma perchè il numerare le vibrazioni d' una corda, che nel render la voce le fa frequentissime, è del tutto impossibile, sarei restato sempre ambiguo, se vero fosse, che la corda dell' ottava più acuta facesse nel medesimo tempo doppio numero di vibrazioni di quelle della più grave, se le onde permanenti, per quanto tempo ci piace, nel far suonare, e vibrare il bicchiere, non m' avessero sensatamente mostrato, come nell' istesso momento, che al-

cuna volta si sente il tuono saltare all'ottava, si vedono nascere altre onde più minute, le quali con infinita pulitezza tagliano in mezzo ciascuna di quelle prime.

Salv. Bellissima osservazione per poter distinguere ad una ad una le onde nate dal tremore del corpo, che risuona, che son poi quelle, che diffuse per l'aria vanno a far la titillazione su'l timpano del nostro orecchio, la quale nell'anima ci diventa suono. Ma dove che il vederle, ed osservarle nell'acqua non dura, se non quanto si continua la confricazion del dito, ed anco in questo tempo non sono permanenti, ma continuamente si fanno, e si dissolvono, non sarebbe bella cosa, quando se ne potesse far con grand'esquisitezza di quelle, che restassero lungo tempo, dico mesi, ed anni, sicchè desse comodità di poterle misurare, ed agiatamente numerare?

Sagr. Veramente io stimerei sommamente una tale invenzione.

Salv. L'invenzione fu del caso, e mia fu solamente l'osservazione, e il far di essa capitale, e stima, come di riprova di nobil contemplazione, ancorchè fattura in se stessa assai vile. Raschiando con uno scarpello di ferro tagliente una piastra di ottone per levarle alcune macchie, nel muovervi sopra lo scarpello con velocità sentii una volta, e due, tra molte

strisciate, fischiare, e uscirne un sibilo molto gagliardo, e chiaro, e guardando sopra la piastra, vidi un lungo ordine di virgolette sottili tra di loro parallele, e per egualissimi intervalli l' una dall' altra distanti. Tornando a raschiar di nuovo più e più volte mi accorsi, che solamente nelle raschiate, che fischiavano, lasciava lo scarpello le intaccature sopra la piastra, ma quando la strisciata passava senza sibilo, non restava pur minima ombra di tali virgolette. Replicando poi altre volte lo scherzo, strisciando ora con maggiore, ed ora con minore velocità, il sibilo riusciva di tuono or più acuto, ed or più grave, ed osservai i segni fatti nel suono più acuto esser più spessi, e quelli del più grave più radi, e talora ancora secondo che la strisciata medesima era fatta verso il fine con maggiore velocità, che nel principio, si sentiva il suono andarsi inacutendo, e le virgolette si vedeva essere andate inspessendosi, ma sempre con estrema lindura, e con assoluta equidistanza segnate; ed oltre a ciò nelle strisciate sibilanti sentiva tremarmi il ferro in pugno, e per la mano scorrermi certo rigore. Ed in somma si vede, e sente fare al ferro quello per appunto, che facciamo noi nel parlar sotto voce, e nell' intonar poi il suono gagliardo, che mandando fuora il fiato senza formare il suono non sentiamo nella gola, e nella bocca farsi movimento alcuno, ri-

spetto però, ed in comparazione del tremor grande, che sentiamo farsi nella laringe, ed in tutte le fauci nel mandar fuora la voce, e massime in tuono grave, e gagliardo. Ho anco talvolta tra le corde del Cimbalo notatone due unisone alli due sibili fatti strisciando al modo detto, e di più differenti di tuono, dei quali due precisamente distavano per una quinta perfetta, e misurando poi gl' intervalli delle virgolette dell' una, e dell' altra strisciata si vedeva la distanza, che conteneva quarantacinque spazj dell'una, contenere trenta dell'altra; quale veramente è la forma, che si attribuisce alla Diapente. Ma qui prima che passare più avanti, voglio avvertirvi, che delle tre maniere d' inacutire il suono, quella, che voi riferite alla sottigliezza della corda, con più verità dee attribuirsi al peso. Imperocchè l' alterazione presa dalla grossezza risponde, quando le corde sieno della medesima materia, e così una minugia per far l' ottava dee esser più grossa quattro volte dell' altra pur di minugia; ed una di ottone più grossa quattro volte di un'altra di ottone. Ma se io vorrò far l' ottava con una di ottone ed una di minugia', non si ha da ingrossar quattro volte, ma sibben farla quattro volte più grave, sicchè quanto alla grossezza questa di metallo non sarà altrimenti quattro volte più grossa, ma ben quadrupla in gravità, che talvolta sarà più sottile, che la sua ri-

spondente all' ottava più acuta, che sia di minugia. Onde accade, che incordandosi un Cimbalo di corde di oro, ed un altro di ottone, se saranno della medesima lunghezza, grossezza, e tensione, per essere l'oro quasi il doppio più grave, riuscirà l' accordatura circa una quinta più grave. E qui notisi, come alla velocità del moto più resiste la gravità del mobile, che la grossezza, contro a quello, che a prima fronte altri giudicherebbe; che ben pare, che ragionevolmente più dovesse esser ritardata la velocità dalla resistenza del mezzo all' esser aperto in un mobile grosso, e leggero, che in uno grave, e sottile; tuttavia in questo caso accade tutto l' opposito. Ma seguitando il primo proposito, dico, che non è la ragion prossima, ed immediata delle forme degl' intervalli musici la lunghezza delle corde, non la tensione, non la grossezza, ma sibben la proporzione dei numeri delle vibrazioni, e percosse dell' onde dell' aria, che vanno a ferire il timpano del nostro orecchio, il quale esso ancora sotto le medesime misure di tempi vien fatto tremare. Fermato questo punto potremo per avventura assegnare assai congrua ragione, onde avvenga che di essi suoni differenti di tuono alcune coppie sieno con gran diletto ricevute dal nostro sensorio, altre con minore, ed altre ci feriscano con grandissima molestia; che è il cercar la ragione delle consonan-

ze più, o men perfette, e delle dissonanze. La molestia di queste nascerà, credo io, dalle discordi pulsazioni di due diversi tuoni, che sproporzionatamente colpeggiano sopra il nostro timpano, e crudissime saranno le dissonanze, quando i tempi delle vibrazioni fussero innumerabili, per una delle quali sarà quella, quando di due corde unisone se ne suoni una con tal parte dell' altra, quale è il lato del quadrato del suo diametro: dissonanza simile al tritono, o semidiapente. Consonanti, e con diletto ricevute saranno quelle coppie di suoni, che verranno a percuotere con qualche ordine sopra il timpano; il quale ordine ricerca prima, che le percosse fatte dentro all' istesso tempo sieno commensurabili di numero, acciocchè la cartilagine del timpano non abbia a stare in un perpetuo tormento d' inflettersi in due diverse maniere per acconsentire, e ubbidire alle sempre discordi battiture. Sarà dunque la prima, e più grata consonanza l' ottava, essendo che per ogni percossa, che dia la corda grave su il timpano, l' acuta ne dà due; talchè amendue vanno a ferire unitamente in una sì, e nell' altra no delle vibrazioni della corda acuta; sicchè di tutto il numero delle percosse la metà si accordano a battere unitamente, ma i colpi delle corde unisone giungon sempre tutti insieme, e però son come di una corda sola, nè fanno con-

sonanza. La quinta diletta ancora, attesochè per ogni due pulsazioni della corda grave l'acuta ne dà tre, dal che ne seguita, che numerando le vibrazioni della corda acuta, la terza parte di tutte si accordano a battere insieme; cioè due solitarie s' interpongono tra ogni coppia delle concordi; e nella Diatessaron se n' interpongon tre. Nella seconda, cioè nel tuono sesquiottavo per ogni nove pulsazioni una sola arriva concordemente a percuotere coll'altra della corda più grave, tutte le altre sono discordi, e con molestia ricevute su il timpano, e giudicate dissonanti dall' udito.

Simp. Vorrei con maggior chiarezza spiegato questo discorso.

Salv. Sia questa linea A B (Fig. XIII.) lo spazio, e la dilatazione di una vibrazione della corda grave: e la linea C D quella della corda acuta, la quale coll'altra renda l'ottava, e dividasi la A B in mezzo in E. È manifesto, che cominciando a muoversi le corde nei termini A, C, quando la vibrazione acuta sarà pervenuta al termine D, l'altra si sarà distesa solamente sino al mezzo E, il quale non sendo termine del moto, non percuote: ma bensì fa colpo in D. Ritornando poi la vibrazione dal D in C, l'altra passa da E in B, onde le due percosse di B, e di C battono unitamente su il timpano: e tornando a reiterarsi le simili

seguenti vibrazioni, si concluderà alternatamente in una sì, e nell'altra no delle vibrazioni C D accadere l'unione delle percosse con quelle di A B: ma le pulsazioni dei termini hanno sempre per compagne una delle C, D, e sempre la medesima; il che è manifesto, perchè posto, che A, C battano insieme, nel passar A in B, C va in D, e torna in C, sicchè i colpi A, C si fanno insieme. Ma sieno ora le due vibrazioni A B, C D quelle, che producono la Diapente, i tempi delle quali sono in proporzion sesquialtera, e dividasi la A B della corda grave in tre parti eguali in E, O, E intendasi le vibrazioni cominciare nell'istesso momento dai termini A, C; è manifesto, che nella percossa, che si farà nel termine D, la vibrazione di A B sarà giunta solamente in O, il timpano dunque riceve la percossa D sola: nel ritorno poi da D in C, l'altra vibrazione passa da O in B, e ritorna in O, facendo la pulsazione in B, che pure è sola, e dicontrattempo (accidente da considerarsi) perchè avendo noi posto le prime pulsazioni fatte nell'istesso momento nei termini A, C, la seconda, che fu sola del termine D si fece dopo, quanto importa il tempo del transito C D, cioè A O, ma la seguente, che si fa in B dista dall'altra solo, quanto è il tempo di O B, che è la metà; continuando poi il ritorno da O in A, men-

tre da C si va in D, si viene a far le due pulsazioni unitamente in A, e D. Seguono poi altri periodi simili a questi, cioè coll' interposizione di due pulsazioni della corda acuta scompagnate, e solitarie, e una della corda grave pur solitaria, e interposta tra le due solitarie dell' acuta. Sicchè se noi figureremo il tempo diviso in momenti, cioe in minime particole eguali; posto che nei due primi, dalle concordi pulsazioni fatte in A, C si passi in O, D, e in D si batta: che nel terzo, e quarto momento ritorni da D in C battendo in C, e che da O si passi per B, e si torni in O battendosi in B, e che finalmente nel quinto, e sesto momento da O, e C, si passi in A, e D battendo in amendue, avremo sopra il timpano le pulsazioni distribuite con tale ordine, che poste le pulsazioni delle due corde nel medesimo instante, due momenti dopo riceverà una percossa solitaria, nel terzo momento un' altra pur solitaria, nel quarto un' altra sola, e due momenti dopo, cioè nel sesto due congiunte insieme: e qui finisce il periodo, e per dir così, l' anomalia, il qual periodo si va poi più volte replicando.

Sagr. Io non posso più tacere, è forza, che io esclami il gusto, che sento nel vedermi tanto adequatamente rendute ragioni di effetti, che tanto tempo mi hanno tenuto in tenebre, e cecità. Ora in-

tendo, perchè l'unisono non differisce punto da una voce sola: intendo perchè l'ottava è la principal consonanza, ma tanto simile all'unisono, che come unisono si perde, e si accompagna colle altre: simile è all'unisono, perchè dove le pulsazioni delle corde unisone vanno a ferire tutte insieme sempre, queste della corda grave dell'ottava vanno tutte accompagnate da quelle dell'acuta, e di queste una s'interpone solitaria, ed in distanze eguali, ed in certo modo senza fare scherzo alcuno, onde tale consonanza ne diviene sdolcinata troppo, e senza brio. Ma la quinta con quei suoi contrattempi, e coll'interpor tra le coppie delle due pulsazioni congiunte, due solitarie della corda acuta, ed una pur solitaria della grave, e queste tre con tanto intervallo di tempo, quanto è la metà di quello, che è tra ciascuna coppia, e le solitarie dell'acuta, fa una titillazione, ed un solletico tale sopra la cartilagine del timpano, che temperando la dolcezza con uno spruzzo di acrimonia par che insieme soavemente baci, e morda.

Salv. È forza, poichè vedo che V. S. gusta tanto di queste novellizie, che io gli mostri il modo, col quale l'occhio ancora, non pur l'udito possa ricrearsi nel vedere i medesimi scherzi, che sente l'udito Sospendete palle di piombo, o altri simili gravi da tre fili di lunghezze diver-

se, ma tali, che nel tempo, che il più lungo fa due vibrazioni il più corto ne faccia quattro, e il mezzano tre, il che accaderà quando il più lungo contenga sedici palmi, o altre misure, delle quali il mezzano ne contenga nove, ed il minore quattro; e rimossi tutti insieme dal perpendicolo, e poi lasciatigli andare si vedrà un intrecciamento vago di essi fili con incontri varj, ma tali, che ad ogni quarta vibrazione del più lungo tutti tre arriveranno al medesimo termine unitamente, e da quello poi si partiranno reiterando di nuovo l'istesso periodo: la qual mistione di vibrazioni è quella, che fatta dalle corde rende all'udito l'ottava colla quinta in mezzo. E se con simile disposizione si andranno temperando le lunghezze di altri fili, sicchè le vibrazioni loro rispondano a quelle di altri intervalli musici, ma consonanti, si vedranno altri, ed altri intrecciamenti, e sempre tali, che in determinati tempi, e dopo determinati numeri di vibrazioni tutti i fili (sieno tre, o sieno quattro) si accordano a giugner nell'istesso momento al termine di loro vibrazioni, e di lì a cominciare un altro simil periodo. Ma quando le vibrazioni di due, o più fili sieno, o incommensurabili, sicchè mai non ritornino a terminar concordemente determinati numeri di vibrazioni, o se pur non essendo incommensu-

rabili, vi ritornano dopo lungo tempo, e dopo gran numero di vibrazioni, allora la vista si confonde nell' ordine disordinato di sregolata intrecciatura, e l' udito con noja riceve gli appulsi intemperati de' tremori dell' aria, che senza ordine, o regola vanno a ferire sul timpano.

Ma dove, Signori miei, ci siamo lasciati trasportare per tante ore dai varj Problemi, ed inopinati discorsi? Siamo giunti a sera, e della proposta materia abbiamo trattato pochissimo, o niente, anzi ce ne siamo in modo disviati, che appena mi sovviene della prima introduzione, e di quel poco ingresso, che facemmo come ipotesi, e principio delle future dimostrazioni.

Sagr. Sarà dunque bene, che ponghiamo per oggi fine ai nostri ragionamenti, dando comodo alla mente di andarsi nel riposo della notte tranquillando, per tornar poi domani (quando piaccia a V. S. di favorirci) ai discorsi desiderati, e principalmente intesi.

Salv. Non mancherò d' esser qua alla istessa ora di oggi a servirle, e goderle.

Finisce la prima Giornata.

GIORNATA SECONDA

Sag. Stavamo il Sig. Simplicio, ed io aspettando la venuta di V. S. e nel medesimo tempo ci andavamo riducendo a memoria l' ultima considerazione, che quasi come principio, e supposizione delle conclusioni, che V. S. intendeva di dimostrarci, fu circa quella resistenza, che hanno tutti i corpi solidi all' esser rotti, dipendente da quel glutine, che tiene le parti attaccate e congiunte, sicchè non senza una potente attrazione cedono, e si separano. Si andò poi cercando, qual potesse esser la causa di tal coerenza, che in alcuni solidi è gagliardissima, proponendosi principalmente quella del vacuo, che fu poi cagione di tante digressioni, che ci

tennero tutta la giornata occupati, e lontani dalla materia primieramente intesa, che era la contemplazione delle resistenze dei solidi all'essere spezzati.

Salv. Ben mi sovviene del tutto, e ritornando sul filo incominciato: Posta qualunque ella sia la resistenza dei corpi solidi all'essere spezzati per una violenta attrazione, basta che indubitabilmente ella in loro si trova, la quale benchè grandissima contro alla forza di chi per diritto gli tira, minore per lo più si osserva nel violentargli per traverso, e così vediamo una verga, per esempio, d'acciajo, o di vetro, reggere per lo lungo il peso di mille libbre, che fitta a squadra in un muro si spezzerà coll'attaccargliene cinquanta solamente. E di questa seconda resistenza dobbiamo noi parlare, ricercando secondo quali proporzioni ella si ritrovi nei prismi, e cilindri simili o dissimili in figura, lunghezza, e grossezza, essendo però dell'istessa materia. Nella quale specolazione io piglio come principio noto quello, che nelle meccaniche si dimostra tra le passioni del Vette, che noi chiamiamo Leva, cioè, che nell'uso della Leva la forza alla resistenza ha la proporzion contraria di quella, che hanno le distanze, tra'l sostegno, e le medesime forza, e resistenza.

Simpl. Questo fu dimostrato da Aristotile nelle sue meccaniche prima che da ogni altro.

Salv Voglio, che gli concediamo il primato nel tempo, ma nella fermezza della dimostrazione parmi, che se gli debba per grand'intervallo anteporre Archimede, da una sola proposizione del quale dimostrata da esso negli Equiponderanti, dipendono le ragioni non solamente della Leva, ma della maggior parte degli altri strumenti meccanici.

Sagr. Ma giacchè questo principio è il fondamento di quello, che voi avete intenzione di volerci dimostrare, non sarebbe se non molto a proposito l' arrecarci anco la prova di tal supposizione, quando non sia materia molto prolissa., dandoci una intera, e compita instruzione.

Salv. Come questo si abbia a fare, sarà pur meglio, che io per altro ingresso alquanto diverso da quello d' Archimede v' introduca nel campo di tutte le future specolazioni, e che non supponendo altro, se non che pesi uguali posti in bilancia di braccia eguali, facciano l'equilibrio, (principio supposto parimente dal medesimo Archimede) io venga poi a dimostrarvi, come non solamente altrettanto sia vero, che pesi diseguali facciano l'Equilibrio in stadera di braccia diseguali secondo la proporzione di essi pesi permutatamente sospesi, ma che l' istessa cosa fa colui, che colloca pesi eguali in distanze eguali, che quello che colloca pesi dis-

eguali in distanze, che abbiano permutatamente la medesima proporzione, che i pesi. Or per chiara dimostrazione di quanto dico, segno un prisma, o cilindro solido A B, sospeso dall' estremità alla linea H I, e sostenuto da due fili H A, I B. (fig. XIV.) È manifesto, che se io sospenderò il tutto dal filo C posto nel mezzo della bilancia H I, il prisma A B resterà equilibrato, essendo la metà del suo peso da una banda, e l'altra dall'altra del punto della sospensione C pel principio da noi supposto. Intendasi ora il prisma esser diviso in parti diseguali dal piano per la linea D, e sia la parte D A maggiore, e la D B minore, ed acciocchè fatta tal divisione le parti del prisma restino nel medesimo sito, e costituzione rispetto alla linea H I soccorriamo con un filo E D, il quale fermato nel punto E sostenga le parti del prisma A D, D B; non è da dubitarsi, che non si essendo fatta veruna local mutazione nel prisma rispetto alla bilancia H I, ella resterà nel medesimo stato dell' equilibrio. Ma nella medesima costituzione resterà ancora, se la parte del prisma, che ora è sospesa dalle due estremità colli fili A H, D E, si appenda ad un sol filo G L posto nel mezzo, e parimente l' altra parte D B non muterà stato sospesa dal mezzo, e sostenuta dal filo F M. Sciolti dunque i fili H A, E D, I B, e lasciati solo li due G L, F M, resterà l' istesso equilibrio, fatta pur sempre la sospensione dal punto C. Or qui voltiamo-

ci a considerare, come noi abbiamo due gravi A D, D B, pendenti dai termini G, F di una libra G F, nella quale si fa l'equilibrio dal punto C, in modo che la distanza della sospensione del grave A D dal punto C è la linea C G, e l'altra parte C F è la distanza, dalla qual pende l'altro grave D B. Resta dunque solo da dimostrarsi, tali distanze aver la medesima proporzione tra di loro, che hanno gli stessi pesi, ma permutatamente presi, cioè che la distanza G C alla C F sia come il prisma D B al prisma D A, il che proveremo così. Essendo la linea G E la metà della E H, e la E F metà della E I, sarà tutta la G F metà di tutta la H I, e però eguale alla C I, e trattane la parte comune C F, sarà la rimanente G C eguale alla rimanente F I, cioè alla F E, e presa comunemente la C E saranno le due G E, C F eguali, e però come G E ad E F, così F C a C G, ma come G E ad E F, così la doppia alla doppia, cioè H E ad E I, cioè il prisma A D al prisma D B. Adunque per l'egual proporzione; e convertendo, come la distanza G C alla distanza C F, così il peso B D al peso D A, che è quello, che io voleva provarvi. Inteso sin qui non credo, che voi porrete difficoltà in ammettere, che i due prismi A D, D B facciano l'equilibrio dal punto C, perchè la metà di tutto il solido A B è alla destra della sospensione C, e l'altra metà dalla sinistra, e che così si vengono a rappresentar due pesi eguali

disposti, e distesi in due distanze eguali. Che poi li due prismi A D, D B ridotti in due dadi, o in due qual'altre si siano figure; (purchè si conservino le sospensioni medesime G, F) seguitino di far l'equilibrio dal punto C, non credo, che sia alcuno, che ne possa dubitare, perchè troppo manifesta cosa è, che le figure non mutano peso, dove si ritenga la medesima quantità di materia. Dal che possiamo raccor la general conclusione, che due pesi qualunque si siano fanno l' equilibrio da distanze permutatamente rispondenti alle loro gravità. Stabilito dunque tal principio avanti che passiamo più oltre, debbono mettere in considerazione, come queste forze, resistenze, momenti, figure, si posson considerare in astratto, e separate dalla materia, ed anco in concreto, e congiunte colla materia; ed in questo modo quelli accidenti, che converranno alle figure considerate come immateriali, riceveranno alcune modificazioni, mentre gli aggiugneremo la materia, ed in conseguenza la gravità. Come per esempio, se noi intenderemo una leva, qual sarebbe questa B A (Fig. xv.), la quale posando su 'l sostegno C sia applicata per sollevare il grave sasso D, è manifesto pel dimostrato principio, che la forza posta nell' estremità B, basterà per adequare la resistenza del grave D, se il suo momento al momento di esso D abbia la medesima proporzione che ha

la distanza A C alla distanza C B, e questo è vero non mettendo in considerazione altri momenti, che quelli della semplice forza in B, e della resistenza in D, quasi che l'istessa Leva fusse immateriale, e senza gravità. Ma se noi metteremo in conto la gravità ancora dello strumento stesso della leva, la quale sarà talor di legno, e talvolta anco di ferro, è manifesto, che alla forza in B aggiunto il peso della leva altererà la proporzione, la quale converrà pronunziare sotto altri termini. E però prima che passar più oltre è necessario, che noi convenghiamo in por distinzione tra queste due maniere di considerare; chiamando un prendere assolutamente quello, quando intenderemo lo strumento preso in astratto, cioè separato dalla gravità della propria materia: ma congiugnendo colle figure semplici ed assolute la materia colla gravità ancora, nomineremo le figure congiunte colla materia momento, o forza composta.

Sagr. È forza ch' io rompa il proposito, che aveva di non dar occasione di digredire, ma non potrei con attenzione applicarmi al rimanente, se non mi fusse rimosso certo scrupolo, che mi nasce; ed è questo, che mi pare, che V. S. faccia comparazione della forza posta in B colla total gravità del sasso D, della qual gravità mi pare, che una parte, e forse forse la maggiore si appoggi sopra il piano dell'orizzonte; sicchè....

Salv. Ho inteso benissimo. V. S. non soggiunga altro; ma solamente avverta, che io non ho nominata la gravità totale del sasso, ma ho parlato del momento, che egli tiene, ed esercita sopra il punto A estremo termine della Leva B A, il quale è sempre minore dell' intero peso del sasso; ed è variabile secondo la figura della pietra, e secondo che ella vien più, o meno sollevata.

Sagr. Resto appagato, ma mi nasce un altro desiderio, che è, che per intera cognizione mi fusse dimostrato il modo, se vi è, di potere investigare qual parte sia del peso totale quella, che vien sostenuta dal soggetto piano, e quale quella, che grava sul vette nell'estremità A.

Salv. Perchè posso con poche parole dargli soddisfazione, non voglio lasciar di servirla; però facendone un poco di figura, intenda V. S. il peso, il cui centro di gravità sia A (fig. XVI.) appoggiato sopra l'Orizzonte col termine B, e nell' altro sia sostenuto col Vette C G, sopra il sostegno N da una potenza posta in G, e dal centro A, e dal termine C caschino perpendicolari all' Orizzonte A O, C F. Dico il momento di tutto il peso al momento della potenza in G aver la proporzion composta della distanza G N alla distanza N C, e della F B alla B O. Facciasi come la linea F B alla B O, così la N C alla X, ed essendo tutto il peso A sostenuto dalle due

potenze poste in B e C, la potenza B alla C è come la distanza F O alla O B, e componendo le due potenze B, C insieme, cioè, il total momento di tutto il peso A alla potenza in C è come la linea F B alla B O, cioè come la N C alla X; ma il momento della potenza in C al momento della potenza in G è, come la distanza G N alla N G; adunque per la perturbata il total peso A al momento della potenza in G, è come la G N alla X; ma la proporzione di G N alla X è composta della proporzione G N ad N C, e di quella di N C ad X, cioè di F B a B O, adunque il peso A alla potenza che lo sostiene in G, ha la proporzione composta delle G N ad N C, e di quella di F B a B O, ch'è quello, che si doveva dimostrare. Or ritornando al nostro primo proposito, intese tutte le cose sin qui dichiarate, non sarà difficile l'intender la ragione, onde avvenga, che un prisma, o cilindro solido di vetro, acciajo, legno, o altra materia frangibile, che sospeso per lo lungo sosterrà gravissimo peso, che gli sia attaccato, ma in traverso (come poco fa dicevamo) da minor peso assai potrà tal volta essere spezzato, secondo che la sua lunghezza eccederà la sua grossezza. Imperocchè figuriamoci il prisma solido A B C D (fig. XVII.) fitto in un muro dalla parte A B, e nell'altra estremità s'intenda la forza del peso E, (intendendo sempre il muro esser

eretto all' Orizzonte, ed il prisma, o cilindro fitto nel muro ad angoli retti) è manifesto, che dovendosi spezzare si romperà nel luogo B, dove il taglio del muro serve per sostegno, e la B C per la parte della leva, dove si pone la forza; e la grossezza del solido B A è l' altra parte della leva, nella quale è posta la resistenza, che consiste nello staccamento, che s' ha da fare della parte del solido B D, che è fuor del muro, da quella che è dentro: e per le cose dichiarate il momento della forza posta in C al momento della resistenza, che sta nella grossezza del prisma, cioè nell' attaccamento della base B A colla sua contigua, ha la medesima proporzione, che la lunghezza C B alla metà della B A, e però l'assoluta resistenza all'esser rotto, che è nel prisma B D (la quale assoluta resistenza è quella, che si fa col tirarlo per diritto, perchè allora tanto è il moto del movente, quanto quello del mosso) alla resistenza respettiva, che ha all'esser rotto con l' ajuto della leva B C, ha la medesima proporzione, che la lunghezza B C alla metà di A B nel prisma, che nel cilindro è il semidiametro della sua base. E questa sia la nostra prima proposizione. E notate che questo, che dico, si debbe intendere rimossa la considerazione del peso proprio del solido B D, il qual solido ho preso, come nulla pesante. Ma quando vorremo mettere in

conto la sua gravità congiugnendola col peso E, dobbiamo al peso I E aggiugnere la metà del peso del solido B C, sicchè essendo v. g. il peso di B D due libbre, e'l peso di E libbre dieci, si dee pigliare il peso E come se fusse undici.

Simpl. E perchè non come se fusse dodici?

Salv. Il peso E, Sig. Simp. mio, pendente dal termine C, preme in rispetto alla leva B C, con tutto il suo momento di libbre dieci, dove se fusse appeso il solo B D, graviterebbe con tutto il momento di due libbre, ma come vedete, tal solido è distribuito per tutta la lunghezza B C uniformemente, onde le parti sue vicine all' estremità B gravitano manco delle più remote; sicchè in somma ristorando quelle con queste, il peso di tutto il prisma si riduce a lavorare sotto il centro della sua gravità, che risponde al mezzo della leva B C; ma un peso pendente dalla estremità C ha momento doppio di quello, che avrebbe pendendo dal mezzo; e però la metà del peso del prisma si dee aggiugnere al peso E, mentre ci serviamo del momento d' amendue, come locati nel termine C.

Simpl Resto capacissimo, e di più s' io non m' inganno, parmi che la potenza di amendue i pesi B D, ed E posti così, avrebbe l' istesso momento, che se tutto il peso di B D col doppio di E, fusse appeso nel mezzo della leva B C.

Salv. Così è precisamente, e si dee tenere a memoria. Qui possiamo immediatamente intender, come, e con che proporzione resista più una verga, o vogliam dir prisma più largo, che grosso all' esser rotto, fattogli forza secondo la sua larghezza, che secondo la grossezza. Per intelligenza di che intendasi una riga A D, (fig. XVIII.) la cui larghezza sia A C, e la grossezza assai minore C B; si cerca, perchè volendola romper per taglio, come nella prima figura resisterà al gran peso T, ma posta per piatto, come nella seconda figura, non resisterà all' X minore del T; il che si fa manifesto, mentre intendiamo il sostegno essere una volta sotto la linea B C, ed un' altra sotto la C A, e le distanze delle forze esser nell' un caso, e nell'altro eguali, cioè la lunghezza B D. Ma nel primo caso la distanza della resistenza dal sostegno, che è la metà della linea C A, è maggiore della distanza nell'altro caso, la quale è la metà della B C: però la forza del peso T, conviene, che sia maggiore della X, quanto la metà della larghezza C A è maggiore della metà della grossezza B C, servendoci quella per contralleva della C A, e questa della C B per superare la medesima resistenza, che è la quantità delle fibre di tutta la base A B. Concludesi per tanto la medesima riga, o prisma più largo, che grosso resister più all' esser rotto per taglio, che per piatto, se-

condo la proporzione della larghezza alla grossezza.

Conviene ora, che cominciamo a investigare, secondo qual proporzione vada crescendo il momento della propria gravità in relazione alla propria resistenza all' essere spezzato in un prisma, o cilindro, mentre stando parallelo all' Orizzonte si va allungando; il qual momento trovo andar crescendo in duplicata proporzione di quella dell'allungamento. Per la cui dimostrazione intendasi il prisma, o cilindro A D (fig. XIX) fitto saldamente nel muro dall' estremità A, e sia equidistante all'Orizzonte; ed il medesimo intendasi allungato sino in E aggiugnendovi la parte B E. È manifesto, che l' allungamento della leva A B sino in C cresce per se solo, cioè assolutamente preso, il momento della forza premente contro alla resistenza dello staccamento, e rottura da farsi in A secondo la proporzione di C A a B A, ma oltre a questo il peso aggiunto del solido B E al peso del solido A B, cresce il momento della gravità premente secondo la proporzione del prisma A E al prisma A B, la qual proporzione è la medesima della lunghezza A C alla A B, adunque è manifesto, che congiunti i due accrescimenti delle lunghezze, e delle gravità, il momento composto di amendue è in doppia proporzione di qualunque di esse. Concludasi

per tanto, i momenti delle forze dei prismi, e cilindri egualmente grossi; ma disegualmente lunghi esser tra di loro in duplicata proporzione di quella delle lor lunghezze, cioè esser come i quadrati delle lunghezze.

Mostreremo adesso nel secondo luogo, secondo qual proporzione cresca la resistenza all'essere spezzati nei prismi, e cilindri, mentre restino della medesima lunghezza, e si accresca la grossezza. E qui dico, che

Nei prismi, e cilindri egualmente lunghi, ma disegualmente grossi la resistenza all'esser rotti cresce in triplicata proporzione dei diametri delle lor grossèzze, cioè delle lor basi.

I due cilindri sieno questi A, B, (Fig. xx.) le cui lunghezze eguali D G, F H, le basi diseguali, i cerchi, i cui diametri C D, E F. Dico, la resistenza del cilindro B alla resistenza del cilindro A ad esser rotti, aver triplicata proporzione di quella, che ha il diametro F E al diametro D C. Imperocchè se consideriamo l'assoluta, e semplice resistenza, che risiede nelle basi, cioè nei cerchi E F, D C, all'essere strappati facendogli forza col tirargli per diritto, non è dubbio, che la resistenza del cilindro B è tanto maggiore, che quella del cilindro A, quanto il cerchio E F è maggiore del C D, perchè tante più sono le fibre, i filamenti, o le parti tenaci,

che tengono unite le parti dei solidi. Ma se consideriamo, che nel far forza per traverso ci serviamo di due leve, delle quali le parti, o distanze, dove si applicano le forze, sono le linee D G, F H, i sostegni sono ne' punti D, F, ma le altre parti, o distanze, dove son poste le resistenze, sono i semidiametri dei cerchi D C, E F, perchè i filamenti sparsi per tutte le superficie dei cerchi, è come se tutti si riducessero nei centri: considerando, dico, tali leve, intenderemo la resistenza nel centro della base E F contro alla forza di H, esser tanto maggiore della resistenza della base C D contro alla forza posta in G, (e sono le forze in G, ed H, di leve eguali D G, F H,) quanto il semidiametro F E è maggiore del semidiametro D C; cresce dunque la resistenza all'esser rotta nel cilindro B sopra la resistenza del cilindro A, secondo amendue le proporzioni dei cerchi E F, D C, e dei loro semidiametri, o vogliam dir diametri: ma la proporzione dei cerchi è doppia di quella dei diametri: adunque la proporzione delle resistenze, che di quelle si compone, è triplicata della proporzione dei medesimi diametri, che è quello, che doveva provare. Ma perchè anco i cubi sono in tripla proporzione dei loro lati, possiamo similmente concludere, le resistenze dei cilindri egualmente lunghi esser tra di loro come i cubi dei loro diametri.

Da questo che si è dimostrato, possiamo concludere ancora, le resistenze dei prismi, e cilindri egualmente lunghi aver sesquialtera proporzione di quella degli stessi cilindri. Il che è manifesto, perchè i prismi e cilindri egualmente alti hanno fra di loro la medesima proporzione, che le lor basi, cioè, doppia dei lati, o diametri di esse basi: ma le resistenze (come si è dimostrato) hanno triplicata proporzione dei medesimi lati, o diametri: adunque la proporzione delle resistenze è sesquialtera della proporzione degli stessi solidi; ed in conseguenza dei pesi dei medesimi solidi.

Simp. Egli è forza, che avanti che si proceda più oltre, io resti sincerato di certa mia difficultà, e questa è, che sin qui non ho sentito mettere in considerazione certa altra sorta di resistenza, la quale mi par che venga diminuita nei solidi, secondo che si vanno più e più allungando, e non solo nell' uso trasversale, ma ancora per lo lungo, in quel modo appunto che vediamo una corda lunghissima esser molto meno atta a reggere un gran peso, che se fusse corta: onde io credo, che una verga di legno o di ferro più peso assai potrà reggere, se sarà corta, che se sarà molto lunga; intendendo sempre usata per lo lungo, e non in traverso; ed anco messo in conto il suo proprio peso, che nella più lunga è maggiore.

Salv. Dubito, Sig. Simpl. che in que-

sto punto voi con molti altri v'ingannate, se però ho ben compreso il vostro concetto, sicchè voi vogliate dire, che una corda lunga, v. g. quaranta braccia non possa sostenere tanto peso, quanto se fosse un braccio o due della medesima corda.

Simpl. Cotesto ho voluto dire, e sin qui mi par proposizione assai probabile.

Salv. Ma io l'ho per falsa, non che per impossibile; e credo di potervi assai agevolmente cavar di errore. Però ponghiamo questa corda A B (Fig. XXI.) fermata di sopra dal capo A, e dall'altro sia il peso C, dalla cui forza debba essa corda essere rotta. Assegnatemi voi, Sig. Simplicio, il luogo particolare dove debba seguir la rottura.

Simp. Sia nel luogo D.

Salv. Vi domando qual sia la cagione dello strapparsi in D.

Simpl. È la causa di ciò, perchè la corda in quella parte non era potente a reggere, v. g. cento libbre di peso, quanto è la parte D B colla pietra C.

Salv. Adunque tuttavolta che tal corda nella parte D venisse violentata dalle medesime cento libbre di peso, ella lì si strapperebbe.

Simpl. Così credo.

Salv. Ma ditemi ora, chi attaccasse il medesimo peso non al fine della corda B, ma vicino al punto D, come sarebbe in E, ovvero legasse la corda non nella

altezza A, ma più vicino, e sopra al punto medesimo D come sarebbe in F, ditemi, dico, se il punto D sentirebbe il medesimo peso delle cento libbre.

Simpl. Sentirebbelo, accompagnando però il pezzo di corda E B colla pietra C.

Salv. Se dunque la corda nel punto D vien tirata dalle medesime cento libbre di peso, si romperà per la vostra concessione; e pure la F E è un piccol pezzo della lunga A B, come dunque volete più dire, che la corda lunga sia più debole della corta? Contentatevi dunque di esser cavato di un errore, nel quale avete avuto molti compagni, ed anco per altro molto intelligenti. E seguitiamo innanzi: ed avendo dimostrato i prismi e cilindri crescere il lor momento sopra le proprie resistenze secondo i quadrati delle lunghezze loro (mantenendo però sempre la medesima grossezza) e parimente gli egualmente lunghi, ma differenti in grossezza crescer le lor resistenze secondo la proporzione dei cubi dei lati, o diametri delle lor basi, passiamo a investigare quello che accaggia a tali solidi differenti in lunghezza e grossezza, nei quali io osservo, che

I prismi e cilindi di diversa lunghezza e grossezza hanno le lor resistenze all'esser rotti di proporzione composta della proporzione dei cubi de' diametri delle lor basi, e della proporzione delle lor lunghezze permutatamente prese.

Siano tali due cilindri questi (Fig. XXII.) A B C, D E F. Dico, la resistenza del cilindro A C alla resistenza del cilindro D F, aver la proporzione composta della proporzione del cubo del diametro A B al cubo del diametro D E, e della proporzione della lunghezza E F alla lunghezza B C. Pongasi la E G eguale alla B C, e delle linee A B, D E sia terza proporzionale la H, e quarta la I, e come la E F alla B C, così sia la I alla S. E perchè la resistenza del cilindro A C alla resistenza del cilindro D G è, come il cubo A B al cubo D E, cioè come la linea A B alla linea I, e la resistenza del cilindro G D alla resistenza del cilindro D F, come la lunghezza F E alla E G, cioè come la linea I alla S, adunque per l'egual proporzione, come la resistenza del cilindro A C alla resistenza del cilindro D F, così la linea A B alla S, ma la linea A B alla S ha la proporzion composta della A B alla I, e della I alla S, adunque la resistenza del cilindro A C alla resistenza del cilindro D F ha la proporzion composta della A B alla I, cioè del cubo di A B al cubo di D E, e della proporzione della linea I alla S, cioè della lunghezza E F alla lunghezza B C, che è quello, che io intendeva di dimostrare.

Dopo la dimostrata Proposizione voglio, che consideriamo quello che accaggia

tra i cilindri e prismi simili, dei quali dimostreremo, come

Dei cilindri e prismi simili i momenti composti, cioè risultanti dalle lor gravità, e dalle loro lunghezze, che sono come Leve, hanno tra di loro proporzione sesquialtera di quella che hanno le resistenze delle medesime lor basi.

Per lo che dimostrare segniamo i due cilindri simili A B, C D (Fig. XXIII.). Dico, il momento del cilindro A B per superare la resistenza della sua base B, al momento di C D per superare la resistenza della sua D, aver sesquialtera proporzione di quella, che ha la medesima resistenza della base B alla resistenza della base D; e perchè i momenti dei solidi A B, C D per superar le resistenze delle lor basi B, D son composti delle lor gravità, e delle forze delle lor leve, e la forza della leva A B è eguale alla forza della leva C D, e questo perchè la lunghezza A B al semidiametro della base B ha la medesima proporzione (per la similitudine de' cilindri) per la lunghezza C D al semidiametro della base D, resta, che il momento totale del cilindro A B al momento totale di C D sia, come la sola gravità del cilindro A B alla sola gravità del cilindro C D, cioè come l'istesso cilindro A B all' istesso C D: ma questi sono in triplicata proporzione dei diametri delle basi loro B, D, e le resistenze delle medesime basi, essendo tra di loro come

l'istesse basi, sono in conseguenza in duplicata proporzione dei medesimi loro diametri; adunque i momenti dei cilindri son in sesquialtera proporzione delle resistenze delle basi loro.

Simp. Questa proposizione mi è veramente giunta non solamente nuova, ma inaspettata, e nel primo aspetto assai remota dal giudizio, che io ne averei conghietturalmente fatto: imperocchè essendo tali figure in tutto il restante simili, avrei tenuto per fermo, che anco i momenti loro verso le proprie resistenze avessero ritenuta la medesima proporzione.

Sagr. Questa è la dimostrazione di quella proposizione, che nel principio dei nostri ragionamenti dissi parermi di scorger per ombra.

Salv. Quello che ora accade al Sig. Simp. avvenne per alcun tempo a me, credendo, che le resistenze di solidi simili fusser simili, sin che certa, nè anche molto fissa o accurata osservazione mi pareva rappresentarmi, nei solidi simili non mantenersi un tenore eguale nelle loro robustezze, ma i maggiori esser meno atti a patire gli eventi violenti, come rimaner più offesi dalle cadute gli uomini grandi che i piccoli fanciulli, e come da principio dicevamo, cadendo dalla medesima altezza vedesi andare in pezzi una gran trave, o una colonna, ma non così un piccolo corrente, o un piccolo cilindro di

marmo. Questa tal quale osservazione mi destò la mente all'investigazione di quello che ora son per dimostrarvi: proprietà veramente ammirabile, poichè tra le infinite figure solide simili tra di loro pur due non ve ne sono, i momenti delle quali verso le proprie resistenze ritengano la medesima proporzione.

Simp. Ora mi fate sovvenire non so che posto da Aristotile tra le sue Questioni Meccaniche, mentre vuol render la ragione, onde avvenga che i legni quanto più son lunghi, tanto più son deboli, e più e più si piegano, benchè i più corti sieno più sottili, e i lunghi più grossi, e se io ben mi ricordo, ne riduce la ragione alla semplice leva.

Salv. È verissimo; e perchè la soluzione non par che tolga interamente la ragion del dubitare, Mons. di Guevara, il quale veramente con i suoi dottissimi Comentarj ha altamente nobilitata, e illustrata quell'Opera, si estende con altre più acute speculazioni per isciorre tutte le difficoltà, restando però esso ancora perplesso in questo punto, se crescendosi colla medesima proporzione le lunghezze e le grossezze di tali solide figure, si debba mantenere l'istesso tenore nelle loro robustezze e resistenze nell'esser rotti, ed anco nel piegarsi. Io dopo un lungo pensarvi ho in questa maniera ritrovato quello che se-

guentemente son per apportarvi. E prima dimostrerò, che

Dei prismi o cilindri simili gravi un solo e unico è quello, che si riduce (gravato dal proprio peso) all'ultimo stato tra lo spezzarsi, e il sostenersi intero: sicchè ogni maggiore, come impotente a resistere al proprio peso, si romperà, e ogni minore resiste a qualche forza che gli venga fatta per romperlo.

Sia il prisma grave A B (Fig. XXIV.) ridotto alla somma lunghezza di sua consistenza, sicchè allungato un minimo di più si rompesse. Dico questo essere unico tra tutti i suoi simili (che pur sono infiniti) atto ad esser ridotto in tale stato ancipite, sicchè ogni maggiore oppresso dal proprio peso si spezzerà, ed ogni minore no, anzi potrà resistere a qualche aggravio di nuova violenza, oltre a quella del proprio peso. Sia il prisma C E simile, e maggiore di A B. Dico questo non poter consistere, ma rompersi superato dalla propria gravità. Pongasi la parte C D lunga quanto A B. E perchè la resistenza di C D a quella di A B è, come il cubo della grossezza di C D al cubo della grossezza di A B, cioè come il prisma C E al prisma A B, (essendo simili) adunque il peso di C E è il sommo, che possa esser sostenuto nella lunghezza del prisma C D; ma la lunghezza C E è maggiore; adunque il prisma C E si romperà. Ma sia F C minore:

si dimostrerà similmente (posta F H eguale alla B A) la resistenza di F C a quella di A B esser, come il prisma F C al prisma A B, quando la distanza A B, cioè F H fusse eguale alla F C; ma è maggiore; adunque il momento del prisma F C posto in C non basta per rompere il prisma F C.

Sagr. Chiarissima e breve dimostrazione concludente la verità, e necessità di una Proposizione, che nel primo aspetto sembra assai remota dal verisimile. Bisognerebbe dunque alterare assai la proporzione tra la lunghezza e la grossezza del prisma maggiore coll' ingrossarlo, o scorciarlo, acciò si riducesse allo stato ancipite tra il reggersi e lo spezzarsi, e la investigazione di tale stato penso, che potesse essere altrettanto ingegnosa.

Salv. Anzi più presto d'avvantaggio, come anco più laboriosa, ed io lo so, che vi spesi non piccol tempo per ritrovarla, ed ora voglio participarvela.

Dato dunque un cilindro, o prisma di massima lunghezza da non esser dal suo proprio peso spezzato, e data una lunghezza maggiore, trovar la grossezza d'un altro cilindro o prisma, che sotto la data lunghezza sia l'unico e massimo resistente al proprio peso.

Sia il cilindro B C (Fig. XXV.) massimo resistente al proprio peso, e sia la D E lunghezza maggiore della A C, biso-

gna trovare la grossezza del cilindro, che sotto la lunghezza D E sia il massimo resistente al proprio peso. Sia delle lunghezze D E, A C terza proporzionale I, e come D E ad I, così sia il diametro F D al diametro B A, e facciasi il cilindro F E. Dico, questo essere il massimo ed unico tra tutti i suoi simili resistente al proprio peso. Delle linee D E, I sia terza proporzionale M, e quarta O. E pongasi F G eguale alla A C. E perchè il diametro F D al diametro A B è, come la linea D E alla I, e delle D E, I la O, è quarta proporzionale, il cubo di F D al cubo di B A sarà, come la D E alla O; ma come il cubo di F D al cubo di B A, così è la resistenza del cilindro D G alla resistenza del cilindro B C; adunque la resistenza del cilindro D G a quella del cilindro B C è, come la linea D E alla O. E perchè il momento del cilindro B C è eguale alla sua resistenza, se si mostrerà il momento del cilindro F E al momento del cilindro B C esser, come la resistenza D F alla resistenza B A, cioè come il cubo di F D al cubo di B A, cioè come la linea D E alla O, avremo l'intento, cioè il momento del cilindro F E esser eguale alla resistenza posta in F D. Il momento del cilindro F E al momento del cilindro D G è, come il quadrato della D E al quadrato della A C, cioè come la linea D E alla I; ma il momento del cilindro D G al momento del cilindro B C

è, come il quadrato D F al quadrato B A, cioè come il quadrato di D E al quadrato della I, cioè come il quadrato della I al quadrato della M, cioè come la I alla O; adunque per l'egual proporzione, come il momento del cilindro F E al momento del cilindro B C, così è la linea D E alla O, cioè il cubo D F al cubo B A, cioè la resistenza della base D F alla resistenza della base B A, che è quello che si cercava.

Sagr. Questa, Sig. Salviati, è una lunga dimostrazione, e molto difficile a ritenersi a memoria per sentirla una sola volta; onde io vorrei, che V. S. si contentasse di replicarla di nuovo.

Salv. Farò quanto V. S. comanda, ma forse sarebbe meglio arrecarne una più speditiva, e breve: ma converrà fare una figura alquanto diversa.

Sagr. Maggiore sarà il favore, e la già dichiarata mi farà grazia darmela scritta, acciò a mio bell' agio possa ristudiarla.

Salv. Non mancherò di servirla. Ora intendiamo un cilindro A, (Fig. XXVI.) il diametro della cui base sia la linea D C, e sia questo A il massimo, che possa sostenersi, del quale vogliamo trovare un maggiore, che pur sia il massimo esso ancora, ed unico, che si sostenga. Intendiamone un simile ad esso A, e lungo quanto la linea assegnata, e questo sia, v. gr. E, il diametro della cui base sia la K L, e

delle due linee D C, K L sia terza proporzionale la M N, che sia diametro della base del cilindro X, di lunghezza eguale all'E. Dico questo X esser quello che cerchiamo. E perchè la resistenza D C alla resistenza K L è, come il quadrato D C al quadrato K L, cioè come il quadrato K L al quadrato M N, cioè come il cilindro E al cilindro X, cioè come il momento E al momento X; ma la resistenza K L alla M N è, come il cubo di K L al cubo di M N, cioè come il cubo D C al cubo K L, cioè come il cilindro A al cilindro E, cioè come il momento A al momento E; adunque per l'analogia perturbata come la resistenza D C alla M N, così il momento A al momento X; adunque il prisma X è nella medesima costituzione di momento e resistenza, che il prisma A.

Ma voglio che facciamo il Problema più generale, e la proposizione sia questa.

Dato il cilindro A C, qualunque si sia il suo momento verso la sua resistenza, e data qualsisia lunghezza D E, trovar la grossezza del cilindro, la cui lunghezza sia D E, e il suo momento verso la sua resistenza ritenga la medesima proporzione che il momento del cilindro A C alla sua.

Ripresa l'istessa figura di sopra (fig. XXV.,) e quasi l'istesso progresso diremo. Perchè il momento del cilindro F E al momento della parte D G, ha la medesima proporzione, che il quadrato E D al quadrato F G, cioè che la linea D E al-

la I, ed il momento del cilindro D G al momento del cilindro A C è, come il quadrato F D al quadrato A B, cioè come il quadrato D E al quadrato I, cioè come il quadrato I al quadrato M, cioè come la linea I alla O; adunque ex aequali il momento del cilindro F E al momento del cilindro A C ha la medesima proporzione della linea D E alla O, cioè del cubo D E al cubo I, cioè del cubo di F D al cubo di A B, cioè della resistenza della base F D alla resistenza della base A B, ch' è quello che si doveva fare.

Or vedano come dalle cose sin qui dimostrate apertamente si raccoglie l' impossibilità del poter non solamente l' arte, ma la natura stessa crescer le sue macchine a vastità immensa, sicchè impossibil sarebbe fabbricar Navilii, Palazzi, o Templi vastissimi, li cui remi, antenne, travamenti, catene di ferro, ed in somma le altre lor parti consistessero: come anco non potrebbe la natura far alberi di smisurata grandezza, poichè i rami loro gravati dal proprio peso finalmente si fiaccherebbero; e parimente sarebbe impossibile far strutture di ossa per uomini, cavalli, o altri animali, che potessero sussistere, e far proporzionatamente gli uffizj loro, mentre tali animali si dovessero augumentare ad altezze immense, se già non si togliesse materia molto più dura, e resistente della consueta, o non si deformassero tali ossi

sproporzionatamente ingrossandogli, onde poi la figura, ed aspetto dell'animale ne riuscisse mostruosamente grosso: il che forse fu avvertito dal mio accortissimo poeta, mentre descrivendo un grandissimo Gigante disse:

Non si può compartir quanto sia lungo,
Sì smisuratamente è tutto grosso.

E per un breve esempio di questo, che dico, disegnai già la (Fig. XXVII.) di un osso allungato solamente tre volte, ed ingrossato con tal proporzione, che potesse nel suo animale grande far l' uffizio proporzionato a quel dell' osso minore nell' animal più piccolo, e le figure son queste: dove vedete sproporzionata figura, che divien quella dell' osso ingrandito. Dal che è manifesto, che chi volesse mantenere in un vastissimo Gigante le proporzioni, che hanno le membra in un uomo ordinario, bisognerebbe o trovar materia molto più dura, e resistente per formarne l' ossa, ovvero ammettere, che la robustezza sua fusse a proporzione assai più fiacca, che negli uomini di statura mediocre, altrimenti crescendogli a smisurata altezza, si vedrebbono dal proprio peso opprimere, e cadere. Dove che all' incontro si vede nel diminuire i corpi non si diminuir colla medesima proporzione le forze, anzi nei minori crescer la gagliardia con proporzion maggiore. Onde io credo, che un

piccolo cane porterebbe addosso due, o tre cani eguali a se, ma non penso già, che un cavallo portasse nè anco un solo cavallo a se stesso eguale.

Simp. Ma se così è grand' occasione mi danno da dubitare le moli immense, che vediamo nei pesci, che tal Balena, per quanto intendo, sarà grande per dieci Elefanti, e pur si sostengono.

Salv. Il vostro dubbio, Sig. Simplicio, mi fa accorgere d'una condizione da me non avvertita prima, potente essa ancora a far che giganti, ed altri animali vastissimi potessero consistere, e agitarsi non meno che i minori, e ciò seguirebbe, quando non solo si aggiugnesse gagliardia all' ossa, ed all'altre parti, officio delle quali è il sostener il proprio, e 'l sopravvegnente peso; ma lasciata la struttura delle ossa colle medesime proporzioni pur nell' istesso modo: anzi più agevolmente consisterebbono le medesime fabbriche, quando con tal proporzione si diminuisse la gravità della materia delle medesime ossa, e quella della carne, o di altro, che sopra l' ossa si abbia ad appoggiare; e di questo secondo artifizio si è prevalsa la natura nella fabbrica dei pesci, facendogli le ossa, e le polpe non solamente assai leggere, ma senza veruna gravità.

Simp. Vedo ben, Signor Salviati, dove tende il vostro discorso: voi volete di-

re, che per essere l'abitazione dei pesci l'elemento dell' acqua, la quale per la sua corpulenza, o come altri vogliono, per la sua gravità scema il peso ai corpi, che in quella si demergono, per tal ragione la materia dei pesci non pesando può senza aggravio dell'ossa loro esser sostenuta; ma questo non basta, perchè quando bene il resto della sustanza del pesce non graviti, gravita però senza dubbio la materia dell'ossa loro. E chi dirà che una costola di Balena grande quanto una trave, non pesi assaissimo, e nell'acqua non dia al fondo? queste dunque non doveriano poter sussistere in sì vasta mole.

Salv. Voi acutamente opponete, e per risposta al vostro dubbio ditemi, se avete osservato stare i pesci quando piace loro sott' acqua immobili, e non discendere verso il fondo, o sollevarsi alla superficie senza far qualche forza col nuoto?

Simp. Questa è chiarissima osservazione.

Salv. Questo dunque potersi i pesci fermare come immobili a mezz' acqua è concludentissimo argomento, il composto della lor mole corporea agguagliar la gravità in ispezie dell' acqua, sicchè se in esso si trovano alcune parti più gravi dell'acqua, necessariamente bisogna, che ve ne sieno altre altrettanto men gravi, acciò si possa pareggiar l' equilibrio. Se dunque le ossa son più gravi, è necessario, che le

polpe, o altre materie, che vi siano, sien più leggere, e queste si opporranno colla lor leggerezza al peso dell'ossa; talchè negli acquatici avverrà l'opposito di quel, che accade negli animali terrestri, cioè che in questi tocchi all'ossa a sostenere il peso proprio, e quel della carne, e in quelli la carne regga la gravezza propria, e quella dell' ossa. E però dee cessar la maraviglia, come nell'acqua possano essere animali vastissimi, ma non sopra la terra, cioè nell' aria.

Simp. Resto appagato, e di più noto, che questi, che noi addimandiamo animali terrestri, più ragionevolmente si dovrebbero dimandare aerei, perchè nell'aria veramente vivono, e dall'aria son circondati, e dell' aria respirano.

Sagr. Piacemi il discorso del Sig. Simp. col suo dubbio, e colla soluzione. E di più comprendo assai facilmente, che uno di questi smisurati pesci tirato in terra forse non si potrebbe per lungo tempo sostenere, ma che relassate le attaccature dell'ossa, la sua mole si ammaccherebbe.

Salv. Io per ora inclino a creder l'istesso; nè son lontano a credere, che il medesimo avverrebbe a quel vastissimo navilio, il quale galleggiando in mare non si dissolve pel peso, e carico di tante merci, ed armamenti, che in secco, e circondato dall' aria forse si aprirebbe. Ma se-

guitiamo la nostra materia, e dimostriamo come

Dato un prisma, o cilindro col suo peso, ed il peso massimo sostenuto da esso, trovare la massima lunghezza, oltre alla quale prolungato dal solo suo proprio peso si romperebbe.

Sia dato il prisma A C (Fig. XXVIII.) col suo proprio peso, e dato parimente il peso D massimo da poter esser sostenuto dall' estremità C, bisogna trovare la lunghezza massima, sino alla quale si possa allungare il detto prisma senza rompersi. Facciasi come il peso del prisma A C al composto dei pesi A C col doppio del peso di D, così la lunghezza C A alla A H, tra le quali sia media proporzionale la A G. Dico A G esser la lunghezza cercata; imperocchè il momento gravante del peso D in C è eguale al momento del peso doppio di D, che fusse posto nel mezzo di A C, dove è anco il centro del momento del prisma A C, il momento dunque della resistenza del prisma A C, che sta in A, equivale al gravante del doppio del peso D col peso A C, attaccati però nel mezzo di A C. E perchè viene ad essersi fatto come il momento di detti pesi così situati, cioè del doppio D con A C al momento di A C, così la H A alla A C, tra le quali è media la A G; adunque il momento del doppio D col momento A C al momento A C è, come il quadrato

G A al quadrato A C: ma il momento premente del prisma G A al momento di A C è come il quadrato G A al quadrato A C: adunque la lunghezza A G è la massima, che si cercava, cioè quella, sino alla quale allungandosi il prisma A C si sosterrebbe, ma più oltre si spezzerebbe.

Sin qui si son considerati i momenti, e le resistenze dei prismi, e cilindri solidi, l'una estremità dei quali sia posta immobile, e solo nell'altra sia applicata la forza di un peso premente, considerandolo esso solo, ovver congiunto colla gravità del medesimo solido, o veramente la sola gravità dell'istesso solido. Ora voglio, che discorriamo alquanto dei medesimi prismi, e cilindri, quando fussero sostenuti da amendue l'estremità, ovvero che sopra un sol punto preso tra le estremità fusser posati. E prima dico, che il cilindro, che gravato dal proprio peso sarà ridotto alla massima lunghezza, oltre alla quale più non si sosterrebbe, o sia retto nel mezzo da un solo sostegno, ovvero da due nell'estremità, potrà esser lungo il doppio di quello, che sarebbe fitto nel muro, cioè sostenuto in un sol termine. Il che per se stesso è assai manifesto, perchè se intenderemo del cilindro, che io segno A B C, (Fig. XXIX.) la sua metà A B esser la somma lunghezza potente a sostenersi stando fissa nel termine B, nell'istesso modo si sosterrà, se posata sopra il sostegno G sa-

rà contrappesata dall'altra sua metà B C. E similmente se del cilindro D E F la lunghezza sarà tale, che solamente la sua metà potesse sostenersi fissa nel termine D, ed in conseguenza l'altra E F, fissa nel termine F, è manifesto, che posti i sostegni H, I sotto l'estremità D, F, ogni momento che si aggiunga di forza, o di peso in E, quivi si farà la rottura.

Quello che ricerca più sottile specolazione è, quando astraendo dalla gravità propria di tali solidi, ci fusse proposto di dovere investigare, se quella forza, o peso che applicato al mezzo d'un cilindro sostenuto nelle estremità basterebbe a romperlo, potrebbe far l'istesso effetto applicato in qualsivoglia altro luogo più vicino all'una, che all'altra estremità. Come per esempio, se volendo noi rompere una mazza presala colle mani nell'estremità, ed appuntato il ginocchio in mezzo, l'istessa forza, che basterebbe usare per romperla in tal modo, basterebbe ancora, quando il ginocchio si puntasse non nel mezzo, ma più vicino all'un degli estremi.

Sagr. Parmi che il Problema sia toccato da Aristotile nelle sue questioni meccaniche.

Salv. Il quesito d'Aristotile non è precisamente l'istesso, perchè ei non cerca altro, se non di render la ragione, perchè manco fatica si ricerchi a romperlo, tenendo le mani nell'estremità del legno,

cioè remote assai dal ginocchio, che se le tenessimo vicine, e ne rende una ragione generale, riducendo la causa alle Leve più lunghe, quando s'allargano le braccia afferrando l'estremità. Il nostro quesito aggiugne qualche cosa di più ricercando se posto il ginocchio nel mezzo, o in altro luogo, tenendo pur le mani sempre nell'estremità, la medesima forza serva in tutti i siti.

Sagr. Nella prima apprensione parrebbe di sì, attesochè le due Leve mantengono in certo modo il medesimo momento, mentre quanto si scorcia l'una, tanto s'allunga l'altra.

Salv. Or vedete, quanto sono in pronto l'equivocazioni, e con quanta cautela, e circospezione convien andar per non v'incorrere. Cotesto che voi dite, e che veramente nel primo aspetto ha tanto del verisimile, in ristretto poi è tanto falso, che quando il ginocchio, che è il fulcimento delle due Leve, sia posto, o non posto nel mezzo, fa tal diversità, che di quella forza, che basterebbe per far la frazione nel mezzo, dovendola fare in qualche altro luogo, tal volta non basterà l'applicarvene quattro volte tanto, nè dieci, nè cento, nè mille. Faremo sopra ciò una tal quale considerazion generale, e poi verremo alla specifica determinazione della proposizione, secondo la quale si van-

no variando le forze per far la frazione più in un punto, chè in un altro.

Segniamo prima questo legno A B (Fig xxx.) da rompersi nel mezzo sopra il sostegno C, ed appresso segniamo l'istesso, ma sotto i caratteri D E da rompersi sopra il sostegno F remoto dal mezzo. Prima è manifesto, che sendo le distanze A C, C B eguali, la forza sarà compartita egualmente nelle estremità B, A. Secondo poichè la distanza D F diminuisce dalla distanza A C, il momento della forza posta in D scema dal momento in A, cioè posto nella distanza C A, e scema secondo la proporzione della linea D F alla A C, ed in conseguenza bisogna crescerlo per pareggiare, o superar la resistenza di F; ma la distanza D F si può diminuire in infinito in relazione alla distanza A C; adunque bisogna poter crescere in infinito la forza da applicarsi in D per pareggiar la resistenza in F. Ma allo incontro secondo che cresce la distanza F E sopra la C B, convien diminuire la forza in E per pareggiare la resistenza in F; ma la distanza F E in relazione alla C B non si può crescere in infinito col ritirare il sostegno F verso il termine D, anzi nè anco il doppio; adunque la forza in E per pareggiare la resistenza in F sarà sempre più che la metà della forza in B. Comprendesi dunque la necessità del doversi augumentare i momenti del con-

giunto delle forze in E, D infinitamente, per pareggiare, o superare la resistenza posta in F, secondo che il sostegno F si andrà approssimando verso l'estremità D.

Sagr. Che diremo, S. Simplicio? non convien egli confessare, la virtù della Geometria essere il più potente strumento d'ogni altro per acutir l'ingegno, e disporlo al perfettamente discorrere, e specolare? e che con gran ragione voleva Platone i suoi scolari prima ben fondati nelle Matematiche? Io benissimo aveva compreso la facultà della Leva, e come crescendo, o scemando la sua lunghezza cresceva, o calava il momento della forza, e della resistenza: contuttociò nella determinazione del presente Problema m'ingannava, e non di poco, ma d'infinito.

Simp. Veramente comincio a comprendere, che la Logica, benchè strumento prestantissimo per regolare il nostro discorso, non arriva, quanto al destar la mente, all'invenzione, e all'acutezza della Geometria.

Sagr. A me pare, che la Logica insegni a conoscere, se i discorsi, e le dimostrazioni già fatte, e trovate procedono concludentemente, ma che ella insegni a trovare i discorsi, e le dimostrazioni concludenti, ciò veramente non credo io. Ma sarà meglio, che il Sig. Salv. ci mostri, secondo qual proporzione vadan crescen-

do i momenti delle forze per superar la resistenza del medesimo legno, secondo i luoghi diversi della rottura.

Salv. La proporzione, che ricercate, procede in cotal forma, che

Se nella lunghezza d'un cilindro si noteranno due luoghi, sopra i quali si voglia far la frazione di esso cilindro, le resistenze di detti due luoghi hanno fra di loro la medesima proporzione, che i rettangoli fatti dalle distanze di essi luoghi contrariamente presi.

Sieno le forze A, B (Fig. xxxi.) minime per rompere in C, e le E, F parimente le minime per rompere in D. Dico le forze A, B alle forze E, F aver la proporzion medesima, che ha il rettangolo A D B al rettangolo A C B. Imperocchè le forze A, B alle forze E, F hanno la proporzion composta delle forze A, B alla forza B, della B alla F, e della F alle F, E. Ma come le forze A, B alla forza B, così sta la lunghezza B A ad A C, e come la forza B alla F, così sta la linea D B alla B C, e come la forza F alle F, E, così sta la linea D A alla A B, adunque le forze A, B alle forze E, F hanno la proporzion composta delle tre, cioè della retta B A ad A C, della D B a B C, e della D A ad A B; ma delle due D A ad A B, ed A B ad A C, si compone la proporzione della D A ad A C; adunque le forze A, B alle forze E, F hanno

la proporzion composta di questa D A ad A C, e dell' altra D B a B C; ma il rettangolo A D B al rettangolo A C B ha la proporzion composta delle medesime D A ad A C, e D B a B C; adunque le forze A, B alle E, F stanno, come il rettangolo A D B al rettangolo A C B, che è quanto a dire la resistenza in C ad essere spezzato alla resistenza ad esser rotto in D aver la medesima proporzione, che il rettangolo A D B al rettangolo A C B, che è quello, che si doveva provare.

In conseguenza di questo Teorema possiamo risolvere un problema assai curioso; ed è,

Dato il peso massimo, retto dal mezzo di un cilindro, o prisma, dove la resistenza è minima, e dato un peso maggior di quello, trovare nel detto cilindro il punto, nel quale il dato peso maggiore sia retto, come peso massimo.

Abbia il dato peso, maggiore del peso massimo, retto dal mezzo del cilindro A B (Fig. XXXII.) ad esso massimo la proporzione della linea E alla F, bisogna trovare il punto nel cilindro, dal quale il dato peso venga sostenuto come massimo. Tra le due E, F sia media proporzionale la G, e come la E alla G, così si faccia la A D alla S, sarà la S minore della A D. Sia A D diametro del mezzo cerchio A H D, nel quale pongasi la A H eguale

alla S, e congiungasi H D, e ad essa si tagli eguale la D R. Dico il punto R essere il cercato, dal quale il dato peso maggiore del massimo retto dal mezzo del cilindro D verrebbe come massimo retto. Sopra la lunghezza B A facciasi il mezzo cerchio A N B, e si alzi la perpendicolare R N, e congiungasi N D. E perchè i due quadrati N R, R D sono eguali al quadrato N D, cioè al quadrato A D, cioè alli due A H, H D, e l'H D è eguale al quadrato D R, adunque il quadrato N R, cioè il rettangolo A R B sarà eguale al quadrato A H, cioè al quadrato S; ma il quadrato S al quadrato A D è, come la F alla E, cioè come il peso massimo retto in D al dato peso maggiore; adunque questo maggiore sarà retto in R come il massimo, che vi possa esser sostenuto; che è quello che si cercava.

Sagr. Intendo benissimo, e vo considerando, che essendo il prisma A B sempre più gagliardo, e resistente alla pressione nelle parti, che più e più si allontanano dal mezzo, nelle travi grandissime, e gravi se ne potrebbe levar non piccola parte verso l' estremità con notabile alleggerimento di peso, che nei travamenti di grandi stanze sarebbe di comodo, ed utile non piccolo. E bella cosa sarebbe il ritrovar quale figura dovrebbe aver quel tal solido, che in tutte le sue parti fusse egualmente resistente, tal che

non più facile fusse ad esser rotto da un peso, che lo premesse nel mezzo, che in qualsivoglia altro luogo.

Salv. Già era in procinto di dirvi cosa assai notabile, e vaga in questo proposito. Fo un poco di figura per meglio dichiararmi. Questo D B (Fig. XXXIII.) è un prisma, la cui resistenza ad essere spezzato nell' estremità A D da una forza premente nel termine B è tanto minore della resistenza, che si troverebbe nel luogo C I, quanto la lunghezza C B è minore della B A, come già si è dimostrato; intendasi adesso il medesimo prisma segato diagonalmente secondo la linea F B, sicchè le faccie opposte sieno due triangoli, uno dei quali verso noi è questo F A B. Ottiene tal solido contraria natura del prisma, cioè che meno resiste all' essere spezzato sopra il termine C, che sopra l'A dalla forza posta in B, quanto la lunghezza C B è minore della B A, il che facilmente proveremo, perchè intendendo il taglio C N O parallelo all' altro A F D, la linea F A alla C N nel triangolo F A B avrà la medesima proporzione, che la linea A B alla B C, e però se noi intenderemo nei punti A, C essere i sostegni di due Leve, le cui distanze B A, A F, B C, C N, queste saranno simili, e però quel momento, che ha la forza posta in B colla distanza B A sopra la resistenza posta nella distanza A F, l'avrà la medesima

forza in B colla distanza B C sopra la medesima resistenza, che fusse posta nella distanza C N: ma la resistenza da superarsi nel sostegno C, posta nella distanza C N dalla forza in B, è minore della resistenza in A, tanto quanto il rettangolo C O è minore del rettangolo A D, cioè quanto la linea C N è minore della A F, cioè la C B della B A; adunque la resistenza della parte O C B ad esser rotto in C è tanto minore della resistenza dell' intero D A O ad esser rotto in A, quanto la lunghezza C B è minore della A B. Aviamo dunque nel trave, o prisma D B, levatone una parte, cioè la metà, segandolo diagonalmente, e lasciato il cuneo, o prisma triangolare F B A, e sono due solidi di condizioni contrarie, cioè quello tanto più resiste, quanto più si scorcia, e questo nello scorciarsi perde altrettanto di robustezza. Ora stante questo, par ben ragionevole, anzi pur necessario, che se gli possa dare un taglio, per lo quale, togliendo via il superfluo, rimanga un solido di figura tale, che in tutte le sue parti sia egualmente resistente.

Simp. È ben necessario, che dove si passa dal maggiore al minore, s' incontri ancora l' eguale.

Sagr. Ma il punto sta ora a trovar, come si ha da guidar la sega per far questo taglio.

Simp. Questo mi si rappresenta, che dovrebbe esser opera assai facile, perchè se col segar il prisma diagonalmente levandone la metà, la figura, che resta, ritien contraria natura a quella del prisma intero, sicchè in tutti i luoghi, nei quali questo acquistava robustezza, quella altrettanto la perdeva, parmi che tenendo la via del mezzo, cioè levando solamente la metà di quella metà, che è la quarta parte del tutto, la rimanente figura non guadagnerà, nè perderà robustezza in tutti quei medesimi luoghi, nei quali la perdita, e il guadagno dell'altre due figure erano sempre eguali.

Salv. Voi Sig. Simp. non avete dato nel segno: e siccome io vi mostrerò, vedrete veramente, che quello, che si può segar del prisma, e levar via senza indebolirlo, non è la sua quarta parte, ma la terza. Ora resta (che è quello, che accennava il Sig. Sagr.) il ritrovar secondo che linea si dee far camminar la sega; la quale proverò, che dee esser linea parabolica. Ma prima è necessario dimostrare certo Lemma, che è tale:

Se saranno due Libre o Leve divise dai loro sostegni in modo, che le due distanze dove si hanno a costituire le potenze, abbiano tra di loro doppia proporzione delle distanze, dove saranno le resistenze, le quali resistenze siano tra loro, come le lor distanze, le potenze sostenenti saranno eguali.

Siano due Leve A B, C D (Fig. xxxiv.) divise sopra i lor sostegni E, F, talmente che la distanza E B alla F D abbia doppia proporzione di quella, che ha la distanza E A alla F C. Dico le potenze, che in B, D sosterranno le resistenze di A, C, esser tra loro eguali. Pongasi la E G media proporzionale tra E B, e F D: sarà dunque come B E ad E G, così G E ad F D, ed A E a C F, e così si è posto esser la resistenza di A alla resistenza di C. E perchè come E G ad F D, così A E a C F, sarà permutando come G E ad E A, così D F ad F C, e però (per esser le due Leve D C, G A divise proporzionalmente nei punti F, E) quando la potenza, che posta in D pareggia la resistenza C, fusse in G, pareggerebbe la medesima resistenza di C posta in A; ma per lo dato la resistenza di A alla resistenza di C ha la medesima proporzione, che la A E alla C F, cioè che la B E alla E G, adunque la potenza G, o vogliam dire D posta in B, sosterrà la resistenza posta in A. Che è quello, che si doveva provare.

Inteso questo: nella faccia F B (Fig. xxxv.) del prisma D B sia segnata la linea Parabolica F N B, il cui vertice B, secondo la quale sia segnato esso prisma, restando il solido compreso dalla base A D dal piano rettangolo A G dalla linea retta B G, e dalla superficie D G B F incurvata secondo la curvità della linea Pa-

rabolica F N B. Dico tal solido esser per tutto egualmente resistente. Sia segato dal piano C O parallelo all' A D, e intendansi due Leve divise, e posate sopra i sostegni A, C, e siano dell' una le distanze B A, A F, e dell' altra le B C, C N. E perchè nella Parabola F B A, la A B alla B C sta, come il quadrato della F A al quadrato di C N, è manifesto la distanza B A, dell' una Leva alla distanza B C dell'altra aver doppia proporzione di quella che ha l' altra distanza A F all' altra C N. E perchè la resistenza da pareggiarsi colla Leva B A alla resistenza da pareggiarsi colla Leva B C ha la medesima proporzione, che il rettangolo D A al rettangolo O C, la quale è la medesima, che ha la linea A F alla N C, che sono l' altre due distanze delle Leve; è manifesto per lo Lemma passato, che la medesima forza, che sendo applicata alla linea B G pareggerà la resistenza D A, pareggerà ancora la resistenza C O. Ed il medesimo si dimostrerà, segandosi il solido in qualsisia altro luogo: adunque tal solido Parabolico è per tutto egualmente resistente. Che poi segandosi il prisma secondo la linea Parabolica F N B, se ne levi la terza parte, si fa manifesto; perchè la semiparabola F N B A, e il rettangolo F B son basi di due solidi compresi tra due piani paralleli, cioè tra i rettangoli F B, D G, perlochè ritengono tra di loro la medesima proporzione,

che esse lor basi; ma il rettangolo FB è sesquialtero della semiparabola FNBA; adunque segando il prisma secondo la linea Parabolica, se ne leva la terza parte. Di qui si vede, come con diminuzion di peso di più di trentatrè per cento si posson far i travamenti senza diminuir punto la loro gagliardia, il che nei Navilii grandi in particolare per regger le coverte può esser di utile non piccolo; attesochè in cotali fabbriche la leggerezza importa infinitamente.

Sagr. Le utilità son tante, che lungo, o impossibile sarebbe il registrarle tutte. Ma io, lasciate queste da banda, avrei più gusto d'intender, che l'alleggerimento si faccia secondo le proporzioni assegnate. Che il taglio secondo la diagonale levi la metà del peso, l'intendo benissimo: ma che l'altro secondo la Parabolica porti via la terza parte del prisma, posso crederlo al Sig. Salviati sempre veridico, ma in ciò più della fede mi sarebbe grata la scienza.

Salv. Vorreste dunque aver la dimostrazione come sia vero, che l'eccesso del prisma sopra queste, che per ora chiamiamo solido Parabolico, sia la terza parte di tutto il prisma. So di averlo altra volta dimostrato; tenterò, ora, se potrò rimettere insieme la dimostrazione, per la quale intanto mi sovviene, che mi serviva di certo Lemma di Archimede, posto da

esso nel libro delle spirali; ed è, che se quante linee si vogliono si eccederanno egualmente, e l' eccesso sia eguale alla minima di quelle, ed altrettante sieno, ciascheduna eguale alla massima; i quadrati di tutte queste saranno meno, che tripli dei quadrati di quelle, che si eccedono; ma i medesimi saranno ben più che tripli di quelli altri, che restano, trattone il quadrato della massima. Posto questo: sia in questo rettangolo A C B P (Fig. xxxvi.) inscritta la linea Parabolica A B; dobbiamo provare il triangolo misto B A P, i cui lati sono B P, P A, e base la linea Parabolica B A, esser la terza parte di tutto il rettangolo C P. Imperocchè se non è tale, sarà o più che la terza parte, o meno. Sia, se esser può, meno, ed a quello, che gli manca intendasi essere eguale lo spazio X. Dividendo poi il rettangolo C P continuatamente in parti eguali con linee parallele ai lati B P, C A, arriveremo finalmente a parti tali, che una di loro sarà minore dello spazio X. Or sia una di quelle il rettangolo O B, e per i punti, dove l' altre paralelle segano la linea Parabolica, facciansi passare le parallele alla A P, e qui intenderò circoscritta intorno al nostro triangolo misto una figura composta di rettangoli, che sono B O, I N, H M, F L, E K, G A, la qual figura sarà pur ancora meno, che la terza parte del rettangolo C P, essendo

che l'eccesso di essa figura sopra il triangolo misto è manco assai del rettangolo B O, il quale è ancor minore dello spazio X.

Sagr. Piano di grazia, che io non vedo, come l'eccesso di questa figura circoscritta sopra il triangolo misto sia manco assai del rettangolo B O.

Salv. Il rettangolo B O non è egli eguale a tutti questi rettangoletti, per i quali passa la nostra linea Parabolica: dico, di questi B I, I H, H F, F E, E G, G A? dei quali una parte sola resta fuori del triangolo misto; ed il rettangolo B O, non si è egli posto ancor minore dello spazio X? adunque se il triangolo insieme coll'X pareggiava per l'avversario la terza parte del rettangolo C P, la figura circoscritta, che al triangolo aggiugne tanto meno, che lo spazio X, resterà pur ancora minore della terza parte del rettangolo medesimo C P; ma questo non può essere, perchè ella è più della terza parte; adunque non è vero, che il nostro triangolo misto sia manco del terzo del rettangolo

Sagr. Ho intesa la soluzione del mio dubbio. Ma bisogna ora provarci, che la figura circoscritta sia più della terza parte del rettangolo G P, dove credo, che avremo assai più da fare.

Salv. Eh non ci è gran difficoltà. Imperocchè nella Parabola il quadrato della

linea D E al quadrato della Z G ha la medesima proporzione, che la linea D A alla A Z, che è quella, che ha il rettangolo K E al rettangolo A G, (per esser l'altezze A K, K L eguali;) adunque la proporzione, che ha il quadrato E D al quadrato Z G, cioè il quadrato L A al quadrato A K, l'ha ancora il rettangolo K E al rettangolo K Z. E nel medesimo modo appunto si proverà degli altri rettangoli L F, M H, N I, O B, star tra di loro come i quadrati delle linee M A, N A, O A, P A. Consideriamo adesso come la figura circoscritta è composta di alcuni spazj, che tra di loro stanno come i quadrati di linee, che si eccedono con eccessi eguali alla minima, e come il rettangolo C P è composto di altrettanti spazj, ciascuno eguale al massimo, che sono tutti i rettangoli eguali all' O B. Adunque pel Lemma di Archimede la figura circoscritta è più della terza parte del rettangolo C P; ma era anche minore, il che è impossibile; adunque il triangolo misto non è manco del terzo del rettangolo C P. Dico parimente, che non è più, imperocchè se è più del terzo del rettangolo C P, intendasi lo spazio X eguale all' eccesso del triangolo sopra la terza parte di esso rettangolo C P, e fatta la divisione, e suddivisione del rettangolo in rettangoli sempre eguali, si arriverà a tale, che uno di quelli sia minore dello spazio X. Sia fatta; e sia il ret-

tangolo B O minore dell' X, e descritta come sopra la figura, avremo nel triangolo misto inscritta una figura composta di rettangoli V O, T N, S M, R L, Q K, la quale non sarà ancora minore della terza parte del gran rettangolo C P. Imperocchè il triangolo misto supera di manco assai la figura inscritta di quello, che egli superi la terza parte di esso rettangolo C P, attesochè l' eccesso del triangolo sopra la terza parte del rettangolo C P è eguale allo spazio X, il quale è minore del rettangolo B O, e questo è anco minore assai dell' eccesso del triangolo sopra la figura inscrittagli; imperocchè ad esso rettangolo B O sono eguali tutti i rettangoletti A G, G E, E F, F H, H I, I B, dei quali sono ancora manco, che la metà, gli avanzi del triangolo sopra la figura inscritto. E però avanzando il triangolo la terza parte del rettangolo C P di più assai (avanzandolo dello spazio X,) che ei non avanza la sua figura inscritta, sarà tal figura ancora maggiore della terza parte del rettangolo C P; ma ella è minore pel Lemma supposto: imperocchè il rettangolo C P, come aggregato di tutti i rettangoli massimi, ai rettangoli componenti la figura inscritta ha la medesima proporzione, che l' aggregato di tutti i quadrati delle linee eguali alla massima ai quadrati delle linee, che si eccedono egualmente, trattone il quadrato della massima;

e però (come dei quadrati accade) tutto l' aggregato dei massimi (che è il rettangolo C P) è più che triplo dell'aggregato degli eccedentisi, trattone il massimo, che compongono la figura inscritta. Adunque il triangolo misto non è nè maggiore, nè minore della terza parte del rettangolo C P; è dunque eguale.

Sagr. Bella, e ingegnosa dimostrazione, e tanto più, quanto ella ci dà la quadratura della Parabola, mostrandola essere sesquiterza del triangolo iscrittogli, provando quello, che Archimede con due tra di loro diversissimi, ma amendue ammirabili progressi di molte proposizioni dimostrò. Come anco fu dimostrata ultimamente da Luca Valerio, altro Archimede secondo dell'età nostra, la qual dimostrazione è registrata nel libro, che egli scrisse del centro della gravità dei solidi.

Salv. Libro veramente da non esser posposto a qualsisia scritto dai più famosi Geometri del presente, e di tutti i secoli passati: il quale quando fu veduto dall'Accademico nostro, lo fece desistere dal proseguire i suoi trovati, che egli andava continuando di scrivere sopra il medesimo soggetto: giacchè vide il tutto tanto felicemente ritrovato, e dimostrato dal detto Sig. Valerio.

Sagr. Io era informato di tutto questo accidente dall' istesso Accademico; e l'aveva anco ricercato, che mi lasciasse

una volta vedere le sue dimostrazioni sin allora ritrovate, quando ei s'incontrò nel libro del Sig. Valerio; ma non mi successe poi il vederle.

Salv. Io ne ho copia, e le mostrerò a V. Sig. che averà gusto di vedere la diversità dei Metodi, con i quali camminano questi due Autori per l'investigazione delle medesime conclusioni, e loro dimostrazioni; dove anco alcune delle conclusioni hanno differente esplicazione, benchè in effetto egualmente vere.

Sagr. Mi sarà molto caro il vederle, e V. S. quando ritorni ai soliti congressi, mi farà grazia di portarle seco. Ma intanto essendo questa della resistenza del solido cavato dal prisma col taglio Parabolico operazione non men bella, che utile in molte opere Meccaniche, buona cosa sarebbe per gli Artefici l'aver qualche regola facile, e spedita per potere sopra il piano del prisma segnare essa linea Parabolica.

Salv. Modi di disegnar tali linee ve ne son molti, ma due sopra tutti gli altri speditissimi glie ne dirò io. Uno dei quali è veramente maraviglioso, poichè con esso in manco tempo, che col compasso altri disegnerà sottilmente sopra una carta quattro, o sei cerchi di differenti grandezze, io posso disegnare trenta, e quaranta linee Paraboliche non men giuste, sottili, e pulite delle circonferenze di essi cerchi.

Io ho una palla di bronzo esquisitamente rotonda non più grande di una noce; questa tirata sopra uno specchio di metallo tenuto non eretto all' Orizzonte, ma alquanto inchinato, sicchè la palla nel moto vi possa camminar sopra calcandolo leggermente nel muoversi, lascia una linea Parabolica sottilissimamente, e pulitissimamente descritta, e più larga, e più stretta, secondo che la projezione si sarà più, o meno elevata. Dove anco abbiamo chiara e sensata esperienza, il moto dei projetti farsi per linee Paraboliche: effetto non osservato prima, che dal nostro amico, il quale ne arreca anco la dimostrazione nel suo libro del moto, che vedremo insieme nel primo congresso. La palla poi per descrivere al modo detto le Parabole, bisogna con maneggiarla alquanto colla mano scaldarla, ed alquanto inumidirla, che così lascerà più apparenti sopra lo specchio i suoi vestigj. L'altro modo per disegnar la linea, che cerchiamo, sopra il prisma, procede così. Ferminsi ad alto due chiodi in una parete equidistanti all' Orizzonte, e tra di loro lontani il doppio della larghezza del rettangolo, su il quale vogliamo notare la semiparabola, e da questi due chiodi penda una catenella sottile, e tanto lunga, che la sua sacca si stenda, quanta è la lunghezza del prisma: questa catenella si piega in figura Parabolica, sicchè andando punteggiando sopra

il muro la strada, che vi fa essa catenella, avremo descritta un' intera Parabola: la quale con un perpendicolo, che penda dal mezzo di quei due chiodi, si dividerà in parti eguali. Il trasferir poi tal linea sopra le faccie opposte del prisma non ha difficoltà nessuna; sicchè ogni mediocre artefice lo saprà fare. Potrebbesi anco coll' ajuto delle linee geometriche segnate sul compasso del nostro amico senza altra fattura andar su l' istessa faccia del prisma punteggiando la linea medesima.

Abbiamo sin qui dimostrate tante conclusioni attenenti alla contemplazione di queste resistenze dei solidi all' essere spezzati, coll' aver prima aperto l' ingresso a tale scienza col suppor come nota la resistenza per diritto, che si potrà conseguentemente camminar avanti ritrovandone altre ed altre conclusioni, e loro dimostrazioni di quelle, che in natura sono infinite. Solo per ora per ultimo termine degli odierni ragionamenti voglio aggiugnere la speculazione delle resistenze dei solidi vacui, de' quali l' arte, e più la natura si serve in mille operazioni; dove senza crescer peso si cresce grandemente la robustezza: come si vede nell' ossa degli uccelli, ed in moltissime canne, che son leggere, e molto resistenti al piegarsi, e rompersi: che se un fil di paglia, che sostien una spiga più grave di tutto il gambo, fosse fatto della medesima quantità di materia, ma

fosse massiccio, sarebbe assai meno resistente al piegarsi, ed al rompersi. E con tal ragione ha osservato l'arte, e confermato l'esperienza, che un'asta vota, o una canna di legno, o di metallo è molto più salda, che se fosse di altrettanto peso, e della medesima lunghezza massiccia, che in conseguenza sarebbe più sottile, e però l'arte ha trovato di far vote dentro le lance, quando si desideri averle gagliarde, e leggere. Mostreremo per tanto, come

Le resistenze di due cilindri eguali, ed egualmente lunghi, l'uno dei quali sia voto, e l'altro massiccio, hanno tra di loro la medesima proporzione, che i lor diametri.

Sieno la canna, o cilindro voto A E, (Fig. XXXVII.) ed il cilindro I N massiccio eguali in peso, ed egualmente lunghi. Dico, la resistenza della canna A E all' esser rotta alla resistenza del cilindro solido I N aver la medesima proporzione, che il diametro A B al diametro I L. Il che è assai manifesto, perchè essendo la canna, e il cilindro I N eguali, ed egualmente lunghi, il cerchio I L, base del cilindro, sarà eguale alla ciambella A B base della canna A E, (chiamo ciambella la superficie, che resta, tratto un cerchio minore dal suo concentrico maggiore) e però le loro resistenze assolute saranno eguali: ma perchè nel romper in traverso ci serviamo nel cilindro I N della lunghezza L N per

Leva, e per sostegno del punto L, e del semidiametro, o diametro L I per contralleva; e nella canna la parte della Leva, cioè la linea B E è eguale alla L N, ma la contralleva oltre al sostegno B è il diametro, o semidiametro A B; resta manifesto la resistenza della canna superar quella del cilindro solido secondo l'eccesso del diametro A B sopra il diametro I L, che è quello, che cercavamo. S'acquista dunque di robustezza nella canna vota sopra la robustezza del cilindro solido secondo la proporzione dei diametri, tuttavolta però che amendue siano dell'istessa materia, peso, e lunghezza. Sarà bene, che conseguentemente andiamo investigando quello, che accaggia negli altri casi indifferentemente tra tutte le canne, e cilindri solidi egualmente lunghi; benchè in quantità di peso diseguali, e più e meno evacuati. E prima dimostreremo, come,

Data una canna vota, si possa trovare un cilindro pieno eguale ad essa.

Facilissima è tale operazione. Imperocchè sia la linea A B (Fig. XXXVIII.) diametro della canna, e C D diametro del voto. Applichisi nel cerchio maggiore la linea A E eguale al diametro C D, e congiungasi la E B. E perchè nel mezzo cerchio A E B l'angolo E è retto, il cerchio, il cui diametro è A B, sarà eguale alli due cerchi dei diametri A E, E B;

ma A E è il diametro del voto della canna; adunque il cerchio, il cui diametro sia E B, sarà eguale alla ciambella A C B D: e però il cilindro solido, il cerchio della cui base abbia il diametro E B, sarà eguale alla canna, essendo egualmente lungo. Dimostrato questo, potremo speditamente

Trovare qual proporzione abbiano le resistenze di una canna, e di un cilindro, qualunque sieno, pur che egualmente lunghi.

Sia la canna A B E, (Fig. XXXIX.) ed il cilindro R S M egualmente lungo, bisogna trovare qual proporzione abbiano tra di loro le lor resistenze. Trovisi per laprecedente il cilindro I L N eguale alla canna, ed egualmente lungo, e delle linee I L, R S (diametri delle basi dei cilindri I N, R M) sia quarta proporzionale la linea V. Dico la resistenza della canna A E a quella del cilindro R M, esser come la linea A B alla V. Imperocchè essendo la canna A E eguale, ed egualmente lunga al cilindro I N, la resistenza della canna alla resistenza del cilindro starà, come la linea A B alla I L; ma la resistenza del cilindro I N alla resistenza del cilindro R M sta, come il cubo I L al cubo R S, cioè come la linea I L alla V; adunque *ex aequali* la resistenza della canna A E alla resistenza del cilindro R M ha la medesima proporzione, che la linea A B alla V, che è quello che si cercava.

GIORNATA TERZA.

DE MOTU LOCALI.

De subjecto vetustissimo novissimam promovemus scientiam. MOTU nil forte antiquius in Natura, et circa eum volumina nec pauca, nec parva a Philosophis conscripta reperiuntur. Symptomatum tamen, quae complura et scitu digna insunt in eo, adhuc inobservata, necdum demonstrata comperio. Leviora quaedam adnotantur: ut gratia exempli, naturalem motum gravium descendentium continue accelerari. Verum juxta quam proportionem ejus fiat acceleratio, proditum hucusque non est: nullus enim, quod sciam, demonstravit, spatia a mobili descendente ex quiete peracta in temporibus aequalibus, eam inter se re-

tinere rationem, quam habent numeri impares ab unitate consequentes. Observatum est, missilia, seu projecta lineam qualitercumque curvam designare; verumtamen eam esse Parabolam nemo prodidit. Haec ita esse, et alia non pauca, nec minus scitu digna, a me demonstrabuntur, et quod pluris faciendum censeo, aditus et accessus ad amplissimam, praestantissimamque scientiam, cujus hi nostri labores erunt elementa, recludetur: in qua ingenia meo perspicaciora abditiores recessus penetrabunt.

Tripartito dividimus hanc tractationem. In prima parte consideramus ea, quae spectant ad Motum aequabilem, seu uniformem. In secunda de Motu naturaliter accelerato scribimus. In tertia de Motu violento, seu de projectis.

DE MOTU AEQUABILI.

Circa Motum aequabilem, seu uniformem unica opus habemus definitione, quam ejusmodi profero.

DEFINITIO.

AEqualem, seu uniformem motum intelligo eum, cujus partes quibuscumque temporibus aequalibus a mobili peractae, sunt inter se aequales.

ADMONITIO.

Visum est addere veteri definitioni (quae simpliciter appellat motum aequabilem, dum temporibus aequalibus aequalia transiguntur spatia) particulam, quibuscumque, hoc est omnibus temporibus aequalibus: fieri enim potest, ut temporibus aliquibus aequalibus mobile pertranseat spatia aequalia, dum tamen spatia transacta in partibus eorundem temporum minoribus, licet aequalibus, aequalia non sint. Ex allata definitione quatuor pendent Axiomata: scilicet

AXIOMA I.

Spatium transactum tempore longiori in eodem Motu aequabili majus esse spatio transacto tempore breviori.

AXIOMA II.

Tempus, quo majus spatium conficitur in eodem motu aequabili, longius est tempore, quo conficitur spatium minus.

AXIOMA III.

Spatium a majori velocitate confectum tempore eodem majus est spatio confecto a minori velocitate.

AXIOMA IV.

Velocitas, qua tempore eodem conficitur majus spatium, major est velocitate, qua conficitur spatium minus.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si Mobile aequabiliter latum, eademque cum velocitate duo pertranseat spatia, tempora lationum erunt inter se ut spatia peracta.

Pertranseat enim Mobile aequabiliter latum eadem cum velocitate duo spatia (Fig. XL.) A B, B C, et sit tempus motus per A B, D E; tempus vero motus per B C esto E F. Dico, ut spatium A B ad spatium B C, ita esse tempus D E ad tempus E F. Protrahantur utrinque spatia, et tempora versus G, H, et I, K, et in A G sumantur quotcunque spatia ipsi A B aequalia, et totidem tempora in D I tempori D E similiter aequalia; et rursus in C H sumantur secundum quamcunque multitudinem spatia ipsi C B aequalia, et totidem tempora in F K tempori E F aequalia. Erunt jam spatium B G, et tempus E I aeque multiplicia spatii B A, et temporis E D, juxta quamcunque multiplicationem accepta, et similiter spatium H B, et tempus K E, spatii C B, temporisque F E aeque multiplicia in qualibet multiplicatione.

Et quia D E est tempus lationis per A B, erit totum E I tempus totius B G, cum motus ponatur aequabilis, sintque in E I tot tempora ipsi D E aequalia, quot sunt in B G spatia aequalia B A, et similiter concludetur K E esse tempus lationis per H B. Cum autem motus ponatur aequabilis, si spatium G B esset aequale ipsi B H, tempus quoque I E tempori E K foret aequale, et si G B majus sit quam B H, etiam I E quam E K majus erit, et si minus, minus. Sunt itaque quatuor magnitudines: A B prima, B C secunda, D E tertia, E F quarta, et primae, et tertiae, nempe spatii A B, et temporis D E, sumpta sunt aeque multiplicia juxta quamcunque multiplicationem tempus I E, et spatium G B, ac demonstratum est haec vel una aequari, vel una deficere, vel una excedere tempus E K, et spatium B H, aeque multiplicia scilicet secundae, et quartae. Ergo prima ad secundam, nempe spatium A B ad spatium B C, eandem habet rationem, quam tertia et quarta, nempe tempus D E ad tempus E F, quod erat demonstrandum.

THEOR. II. PROP. II.

Si mobile temporibus aequalibus duo pertranseat spatia, erunt ipsa spatia inter se ut velocitates. Et si spatia sint ut velocitates, tempora erunt aequalia.

Assumpta enim superiori figura sint duo spatia A B, B C transacta aequalibus temporibus, spatium quidem A B cum velocitate D E, et spatium B C cum velocitate E F. Dico, spatium A B ad spatium B C esse, ut D E velocitas ad velocitatem E F; sumptis enim utrinque ut supra, et spatiorum, et velocitatum aeque multiplicibus secundum quamcunque multiplicationem scilicet G B, et I E ipsorum A B, et D E, pariterque H B, K E ipsorum B C, E F, concludetur eodem modo ut supra multiplicia G B, I E vel una deficere, vel aequari, vel excedere aeque multiplicia B H, E K; igitur et manifestum est propositum.

THEOR. III. PROP. III.

Inaequalibus velocitatibus per idem spatium latorum tempora velocitatibus e contrario respondent.

Sint velocitates inaequales A (Fig. XLI.) major, B minor, et secundum utranque fiat motus per idem spatium C D. Dico tempus, quo A velocitas permeat spatium C D, ad tempus, quo velocitas B idem spatium permeat, esse, ut velocitas B ad velocitatem A. Fiat enim ut A ad B, ita C D ad C E; erit igitur ex praecedenti tempus, quo A velocitas conficit C D, idem cum tempore, quo B conficit C E; sed

tempus, quo velocitas B conficit C E, ad tempus quo eadem conficit C D, est ut C E ad C D; ergo tempus, quo velocitas A conficit C D, ad tempus quo velocitas B idem C D conficit, est ut C E ad C D, hoc est ut velocitas B ad velocitatem A, quod erat intentum.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si duo mobilia ferantur motu aequabili, inaequali tamen velocitate; spatia temporibus inaequalibus ab ipsis peracta, habebunt rationem compositam ex ratione velocitatum, et ex ratione temporum.

Mota sint duo mobilia E, F (Fig. XLII) motu aequabili, et ratio velocitatis mobilis E ad velocitatem mobilis F sit, ut A ad B; temporis vero, quo movetur E ad tempus, quo movetur F, ratio sit, ut C ad D. Dico spatium peractum ab E cum velocitate A in tempore C, ad spatium peractum ab F cum velocitate B in tempore D, habere rationem compositam ex ratione velocitatis A ad velocitatem B, et ex ratione temporis C ad tempus D. Sit spatium ab E cum velocitate A in tempore C peractum G, et ut velocitas A ad velocitatem B, ita fiat G ad I, ut autem tempus C ad tempus D, ita sit I ad L: constat I esse spatium, quo movetur F in tempore eodem, in quo E motum est per G, cum spatia G, I sint ut velocitates A, B; et cum sit ut

tempus C ad tempus D, ita I ad L: sit autem I spatium, quod conficitur a mobili F in tempore C, erit L spatium, quod conficitur ab F in tempore D cum velocitate B: ratio autem G ad L componitur ex rationibus G ad I, et I ad L, nempe ex rationibus velocitatis A ad velocitatem B, et temporis C ad tempus D; ergo patet propositum.

THEOR. V. PROP. V.

Si duo mobilia aequabili motu ferantur, sint tamen velocitates inaequales, et inaequalia spatia peracta, ratio temporum composita erit ex ratione spatiorum, et ex ratione velocitatum contrarie sumptarum.

Sint duo Mobilia A, B, (Fig XLIII.) sitque velocitas ipsius A ad velocitatem ipsius B ut V ad T, spatia autem peracta sint ut S ad R. Dico rationem temporis, quo motum est A, ad tempus, quo motum est B compositam esse ex ratione velocitatis T ad velocitatem V, et ex ratione spatii S ad spatium R. Sit ipsius motus A tempus C, et ut velocitas T ad velocitatem V, ita sit tempus C ad tempus E. Et cum C sit tempus, in quo A cum velocitate V conficit spatium S, sitque ut velocitas T mobilis B ad velocitatem V, ita tempus ad tempus E, erit tempus E illud, in quo mobile B conficeret idem spatium S. Fiat tertio, ut spatium S ad spa-

tium R, ita tempus E ad tempus G; constat G esse tempus, quo B conficeret spatium R. Et quia ratio C ad G componitur ex rationibus C ad E, et E ad G; est autem ratio C ad E eadem cum ratione velocitatum mobilium A, B contrarie sumptarum, hoc est, cum ratione T ad V; ratio vero E ad G est eadem cum ratione spatiorum S, R; ergo patet propositum.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si duo Mobilia aequabili motu ferantur, ratio velocitatum ipsorum composita erit ex ratione spatiorum peractorum et ex ratione temporum contrarie sumptorum.

Sint duo Mobilia A, B aequabili motu lata: sint autem spatia ab illis peracta in ratione V ad T, tempora vero sint ut S ad R. Dico velocitatem mobilis A ad velocitatem ipsius B habere rationem compositam ex ratione spatii V ad spatium T, et temporis R ad tempus S.

Sit velocitas C ea, cum qua mobile A conficit spatium V in tempore S, et quam rationem habet spatium V ad spatium T, hanc habeat velocitas C ad aliam E; erit E velocitas, cum qua mobile B conficit spatium T in tempore eodem S: quod si fiat ut tempus R ad tempus S, ita velocitas E ad aliam G; erit velocitas G illa, secundum quam mobile B conficit spatium T in

tempore R. Habemus itaque velocitatem C, cum qua mobile A conficit spatium V in tempore S, et velocitatem G, cum qua mobile B conficit spatium T in tempore R, et est ratio C ad G composita ex rationibus C ad E, et E ad G; ratio autem C ad E posita est eadem cum ratione spatii V ad spatium T; ratio vero E ad G, est eadem cum ratione R ad S; ergo patet propositum.

Salv. Questo, che abbiamo veduto, è quanto il nostro Autore ha scritto del moto equabile. Passeremo dunque a più sottile, e nuova contemplazione intorno al moto naturalmente accelerato, quale è quello, che generalmente è esercitato dai mobili gravi discendenti, ed ecco il titolo, e l'introduzione.

DE MOTU NATURALITER ACCELERATO.

Quae in motu aequabili contingunt accidentia, in praecedenti libro considerata sunt: modo de motu accelerato pertractandum. Et primo definitionem ei, quo utitur natura, apprime congruentem investigare, atque explicare convenit. Quamvis enim aliquam lationis speciem ex arbitrio confingere, et consequentes ejus pas-

siones contemplari non sit inconveniens, (ita enim qui Helicas, aut Conchoides lineas ex motibus quibusdam exortas, licet talibus non utatur natura, sibi finxerunt, earum symptomata ex suppositione demonstrarunt cum laude) tamen quandoquidem quadam accelerationis specie gravium descendentium utitur natura, eorundem speculari passiones decrevimus, si eam, quam allaturi sumus de nostro motu accelerato definitionem cum essentia motus naturaliter accelerati congruere contigerit. Quod tandem post diuturnas mentis agitationes reperisse confidimus ea potissimum ducti ratione, quia symptomatis deinceps a nobis demonstratis apprime respondere, atque congruere videntur ea, quae naturalia experimenta sensui repraesentant. Postremo ad investigationem motus naturaliter accelerati nos quasi manu duxit animadversio consuetudinis, atque instituti ipsiusmet naturae in ceteris suis operibus omnibus, in quibus exerendis uti consuevit mediis primis, simplicissimis, facillimis: neminem enim esse arbitror, qui credat natatum, aut volatum, simpliciori, aut faciliori modo exerceri posse, quam eo ipso, quo pisces, et aves instinctu naturali utuntur. Dum igitur lapidem ex sublimi a quiete descendentem nova deinceps velocitatis acquirere incrementa animadverto, cur talia additamenta simplicissima, atque omnibus magis obvia ratione fieri non cre-

dam? Quod si attente inspiciamus, nullum additamentum, nullum incrementum magis simplex inveniemus, quam illud, quod semper eodem modo superaddit. Quod facile intelligemus maximam temporis, atque motus affinitatem inspicientes: sicut enim motus aequabilitas, et uniformitas per temporum, spatiorumque aequalitates definitur, atque concipitur (lationem enim tunc aequabilem appellamus, cum temporibus aequalibus æqualia conficiunt spatia) ita per easdem æqualitates partium temporis incrementa celeritatis simpliciter facta percipere possumus: mente concipientes motum illum uniformiter, eodemque modo continue acceleratum esse, dum temporibus quibuscunque aequalibus aequalia ei superaddantur celeritatis additamenta. Adeo ut sumptis quotcunque temporis particulis aequalibus a primo instanti, in quo mobile recedit a quiete, et descensum aggreditur, celeritatis gradus in prima cum secunda temporis particula acquisitus duplus sit gradus, quem acquisivit mobile in prima particula: gradus vero, quem obtinet in tribus particulis, triplus, quem in quatuor, quadruplus ejusdem gradus primi temporis. Ita ut (clarioris intelligentiæ causa) si mobile lationem suam continuaret juxta gradum, seu momentum velocitatis in prima temporis particula acquisitae, motumque suum deinceps aequabiliter cum tali gradu extenderet, latio haec duplo

esset tardior ea, quam juxta gradum velocitatis in duabus temporis particulis acquisitæ obtineret; et sic a recta ratione absonum nequaquam esse videtur, si accipiamus intentionem velocitatis fieri juxta temporis extensionem: ex quo definitio Motus, de quo acturi sumus, talis accipi potest. Motum æquabiliter, seu uniformiter acceleratum dico illum, qui a quiete recedens temporibus æqualibus æqualia celeritatis momenta sibi superaddit.

Sagr. Io, siccome fuor di ragione mi opporrei a questa, o ad altra definizione, che da qualsivoglia Autore fusse assegnata, essendo tutte arbitrarie; così ben posso senza offesa dubitare; se tal definizione concepita, ed ammessa in astratto, si adatti, convenga, e si verifichi in quella sorta di moto accelerato, che i gravi naturalmente discendenti vanno esercitando. E perchè pare, che l'Autore ci prometta, che tale, quale egli ha definito, sia il moto naturale dei gravi, volentieri mi sentirei rimuover certi scrupoli, che mi perturbano la mente, acciò poi con maggiore attenzione potessi applicarmi alle proporzioni, e lor dimostrazioni, che si attendono.

Salv. È bene, che V. S. ed il Sig. Simplicio vadano proponendo le difficoltà: le quali mi vo immaginando, che sieno per essere quelle stesse, che a me ancora sovvennero, quando primieramente vidi

questo trattato, e che o dall'Autor medesimo ragionandone seco mi saran sopite, o taluna ancora da me stesso col pensarvi rimossa.

Sagr. Mentre io mi vo figurando un mobile grave discendente partirsi dalla quiete, cioè dalla privazione di ogni velocità, ed entrare nel moto, ed in quello andarsi velocitando secondo la proporzione, che cresce il tempo dal primo instante del moto; ed avere v. gr. in otto battute di polso acquistato otto gradi di velocità, della quale nella quarta battuta ne aveva guadagnati quattro, nella seconda due, nella prima uno, essendo il tempo suddivisibile in infinito, ne seguita, che diminuendosi sempre con tal ragione l'antecedente velocità, grado alcuno non sia di velocità così piccolo, o vogliamo dir di tardità così grande, nel quale non si sia trovato costituito l'istesso mobile dopo la partita dall' infinita tardità, cioè dalla quiete. Talchè se quel grado di velocità, che egli ebbe alle quattro battute di tempo, era tale, che mantenendola equabile avrebbe corso due miglia in un'ora, e col grado di velocità, che ebbe nella seconda battuta, avrebbe fatto un miglio per ora, convien dire, che negl' instanti del tempo più e più vicini al primo della sua mossa dalla quiete, si trovasse così tardo, che non avrebbe (seguitando di muoversi con tal tardità) passato un miglio in un'ora,

nè in un giorno, nè in un anno, nè in mille, nè passato anco un sol palmo in tempo maggiore: accidente, al quale pare che assai male agevolmente si accomodi l'immaginazione, mentre che il senso ci mostra un grave cadente venir subito con gran velocità.

Salv. Questa è una delle difficoltà, che a me ancora su il principio dette che pensare, ma non molto dopo la rimossi; ed il rimuoverla fu effetto della medesima esperienza, che di presente a voi la suscita. Voi dite parervi, che l'esperienza mostri, che appena partitosi il grave dalla quiete, entri in una molto notabile velocità; ed io dico, che questa medesima esperienza ci chiarisce i primi impeti del cadente, benchè gravissimo, esser lentissimi e tardissimi. Posate un grave sopra una materia cedente, lasciandovelo fin che prema, quanto egli può colla sua semplice gravità: è manifesto, che alzandolo un braccio, o due, lasciandolo poi cadere sopra la medesima materia, farà colla percossa nuova pressione, e maggiore, che la fatta prima col solo peso; e l'effetto sarà cagionato dal mobile cadente congiunto colla velocità guadagnata nella caduta, il quale effetto sarà più e più grande, secondo che da maggior altezza verrà la percossa, cioè secondo che la velocità del percuziente sarà maggiore. Quanta dun-

que sia la velocità di un grave cadente, lo potremo noi senza errore conghietturare dalla qualità, e quantità della percossa. Ma ditemi, Signori, quel mazzo che lasciato cadere sopra un palo dall'altezza di quattro braccia lo ficca in terra, v. gr. quattro dita, venendo dall'altezza di due braccia lo caccerà assai manco, e meno dall'altezza di uno, e manco da un palmo; e finalmente sollevandolo un dito, che farà di più, che se senza percossa vi fusse posto sopra? certo pochissimo, ed operazione del tutto impercettibile sarebbe, se si elevasse, quanto è grosso un foglio. E perchè l'effetto della percossa si regola dalla velocità del medesimo percuziente, chi vorrà dubitare, che lentissimo sia il moto, e più che minima la velocità, dove l'operazione sua sia impercettibile? Vedano ora quanta sia la forza della verità, mentre l'istessa esperienza, che pareva nel primo aspetto mostrare una cosa, meglio considerata ci assicura del contrario. Ma senza ridursi a tale esperienza, (che senza dubbio è concludentissima) mi pare, che non sia difficile col semplice discorso penetrare una tal verità. Noi abbiamo un sasso grave sostenuto nell'aria in quiete; si libera dal sostegno, e si pone in libertà; e come più grave dell'aria, vien discendendo al basso, e non con moto equabile, ma lento nel principio, e continuamente dopo accelerato; ed essendo

che la velocità è augumentabile, e menomabile in infinito, qual ragione mi persuaderà, che tal mobile partendosi da una tardità infinita (che tale è la quiete) entri immediatamente in dieci gradi di velocità più, che in una di quattro, o in questa prima, che in una di due, di uno, di un mezzo, di un centesimo? ed in somma in tutte le minori in infinito? Sentite in grazia. Io non credo, che voi fuste renitenti a concedermi, che l'acquisto dei gradi di velocità del sasso cadente dallo stato di quiete possa farsi col medesimo ordine, che la diminuzione, e perdita dei medesimi gradi, mentre da virtù impellente fusse ricacciato in su alla medesima altezza: ma quando ciò sia, non vedo, che si possa dubitare, che nel diminuirsi la velocità del sasso ascendente consumandola tutta possa pervenire allo stato di quiete prima, che passar per tutti i gradi di tardità.

Simp. Ma se i gradi di tardità maggiore e maggiore sono infiniti, giammai non si consumeranno tutti; onde tal grave ascendente non si condurrà mai alla quiete, ma infinitamente si moverà, ritardandosi sempre: cosa che non si vede accadere.

Salv. Accaderebbe cotesto, Sig. Simp. quando il mobile andasse per qualche tempo trattenendosi in ciaschedun grado; ma egli vi passa solamente senza dimorarvi oltre a un istante, e perchè in ogni tempo quanto, ancorchè piccolissimo, sono infini-

ti instanti, però son bastanti a rispondere agli infiniti gradi di velocità diminuita. Che poi tal grave ascendente non persista per verun tempo quanto in alcun medesimo grado di velocità, si fa manifesto così: perchè se assegnato qualche tempo quanto, nel primo instante di tal tempo, ed anco nell' ultimo il mobile si trovasse avere il medesimo grado di velocità, potrebbe da questo secondo grado esser parimente sospinto in su per altrettanto spazio, siccome dal primo fu portato al secondo, e per l' istessa ragione passerebbe dal secondo al terzo, e finalmente continuerebbe il suo moto uniforme in infinito.

Sagr. Da questo discorso mi par che si potrebbe cavare una assai congrua ragione della quistione agitata tra i Filosofi, qual sia la causa dell' accelerazione del moto naturale dei gravi. Imperocchè mentre io considero, nel grave cacciato in su andarsi continuamente diminuendo quella virtù impressagli dal proiciente, la quale, sinchè fu superiore all' altra contraria della gravità, lo sospinse in alto, giunte che sieno questa e quella all' equilibrio, resta il mobile di più salire, e passa per lo stato della quiete, nel quale l'impeto impresso non è altrimenti annichilato, ma solo consumatosi quell' eccesso, che pur dianzi aveva sopra la gravità del mobile, per lo quale prevalendogli lo spigneva in su. Continuandosi poi la diminuzione di

questo impeto straniero, e in conseguenza cominciando il vantaggio ad esser dalla parte della gravità, comincia altresì la scesa, ma lenta per lo contrasto della virtù impressa, buona parte della quale rimane ancora nel mobile: ma perchè ella pur va continuamente diminuendosi, venendo sempre con maggior proporzione superata dalla gravità, quindi nasce la continua accelerazione del moto.

Simp. Il pensiero è arguto: ma più sottile che saldo. Imperocchè quando pur sia concludente, non soddisfà se non a quei moti naturali, ai quali sia preceduto un moto violento, nel quale resti ancora vivace parte della virtù esterna: ma dove non sia tal residuo, ma si parta il mobile da una antiquata quiete, cessa la forza di tutto il discorso.

Sagr. Credo, che voi siate in errore, e che questa distinzione di casi, che fate, sia superflua, o per dir meglio nulla. Però ditemi, se nel projetto può esser talvolta impressa dal proiciente molta, e talora poca virtù; sicchè possa esser scagliato in alto cento braccia, ed anco venti, o quattro, o uno?

Simp. Non è dubbio, che sì?

Sagr. E non meno potrà cotal virtù impressa di così poco superar la resistenza della gravità, che non l'alzi più di un dito; e finalmente può la virtù del proiciente esser solamente tanta, che pareggi per l'ap-

punto la resistenza della gravità, sicchè il mobile sia non cacciato in alto, ma solamente sostenuto. Quando dunque voi reggete in mano una pietra, che altro gli fate voi, che l'imprimergli tanta virtù impellente all' in su, quanta è la facoltà della sua gravità traente in giù? E questa vostra virtù non continuate voi di conservargliela impressa per tutto il tempo, che voi la sostenete in mano? Si diminuisce ella forse per la lunga dimora, che voi la reggete? E questo sostentamento, che vieta la scesa al sasso, che importa, che sia fatto più dalla vostra mano, che da una tavola o da una corda, dalla quale ei sia sospeso? Certo niente. Concludete pertanto, Sig. Simpl. che il precedere alla caduta del sasso una quiete lunga o breve, o momentanea, non fa differenza alcuna, sicchè il sasso non parta sempre affetto da tanta virtù contraria alla sua gravità, quanta appunto bastava a tenerlo in quiete.

Salv. Non mi par tempo opportuno di entrare al presente nell' investigazione della causa dell' accelerazione del moto naturale, intorno alla quale da varj Filosofi varie sentenze sono state prodotte, riducendola alcuni all' avvicinamento al centro, altri al restar successivamente manco parti del mezzo da fendersi: altri a certa estrusione del mezzo ambiente, il quale nel ricongiugnersi a tergo del mobile lo va premendo, e continuatamente scaccian-

do, le quali fantasie con altre appresso converrebbe andare esaminando, e con poco guadagno risolvendo. Per ora basta al nostro Autore, che noi intendiamo, che egli ci vuole investigare, e dimostrare alcune passioni di un moto accelerato, (qualunque si sia la causa della sua accelerazione) talmente che i momenti della sua velocità vadano accrescendosi dopo la sua partita dalla quiete con quella semplicissima proporzione, colla quale cresce la continuazion del tempo, che è quanto dire, che in tempi eguali si facciano eguali additamenti di velocità. E se s'incontrerà, che gli accidenti, che poi saranno dimostrati, si verifichino nel moto dei gravi naturalmente discendenti, ed accelerati, potremo reputare, che l'assunta definizione comprenda cotal moto dei gravi, e che vero sia, che l'accelerazione loro vada crescendo secondo che cresce il tempo, e la durazione del moto.

Sagr. Per quanto per ora mi si rappresenta all' intelletto, mi pare, che con chiarezza forse maggiore si fusse potuto definire senza variare il concetto: Moto uniformemente accelerato esser quello, nel quale la velocità andasse crescendo secondo che cresce lo spazio, che si va passando; sicchè per esempio il grado di velocità acquistato dal mobile nella scesa di quattro braccia, fusse doppio di quello, che egli ebbe, sceso che fu lo spazio di due,

e questo doppio del conseguito nello spazio del primo braccio. Perchè non mi par che sia da dubitare, che quel grave che viene dall' altezza di sei braccia, non abbia, e percuota con impeto doppio di quello che ebbe, sceso che fu tre braccia, e triplo di quello che ebbe alle due, e sescuplo dell' avuto nello spazio di uno.

Salv. Io mi consolo assai d'aver avuto un tanto compagno nell' errore; e più vi dirò, che il vostro discorso ha tanto del verisimile e del probabile, che il nostro medesimo Autore non mi negò, quando io glielo proposi, d'esser egli ancora stato per qualche tempo nella medesima fallacia. Ma quello, di che io poi sommamente mi maravigliai, fu il vedere scoprir con quattro semplicissime parole, non pur false, ma impossibili due proposizioni, che hanno del verisimile tanto, che avendole io proposte a molti, non ho trovato, chi liberamente non me l'ammettesse.

Simpl. Veramente io sarei del numero dei conceditori: e che il grave discendente *vires acquirat eundo*, crescendo la velocità a ragion dello spazio, e che il momento dell' istesso percuziente sia doppio, venendo da doppia altezza, mi pajono proposizioni da concedersi senza repugnanza o controversia.

Salv. E pur son tanto false, e impossibili, quanto che il moto si faccia in un istante. Ed eccovene chiarissima dimostra-

zione. Quando le velocità hanno la medesima proporzione, che gli spazj passati, o da passarsi, tali spazj vengono passati in tempi eguali; se dunque le velocità, colle quali il cadente passò lo spazio di quattro braccia, furon doppie delle velocità, colle quali passò le due prime braccia (siccome lo spazio è doppio dello spazio) adunque i tempi di tali passaggi sono eguali; ma passare il medesimo mobile le quattro braccia, e le due nell' istesso tempo non può aver luogo fuor che nel moto instantaneo; ma noi vediamo, che il grave cadente fa suo moto in tempo, ed in minore passa le due braccia, che le quattro; adunque è falso, che la velocità sua cresca come lo spazio. L'altra proposizione si dimostra falsa colla medesima chiarezza. Imperocchè essendo quello che percuote il medesimo; non può determinarsi la differenza e momento delle percosse, se non dalla differenza della velocità. Quando dunque il percuziente venendo da doppia altezza facesse percossa di doppio momento, bisognerebbe, che percuotesse con doppia velocità; ma la doppia velocità passa il doppio spazio nell' istesso tempo, e noi vediamo il tempo della scesa dalla maggiore altezza esser più lungo.

Sagr. Troppa evidenza, troppa agevolezza è questa, colla quale manifestate conclusioni ascose; questa somma facilità le rende di minor pregio, che non erano,

mentre stavano sotto contrario sembiante. Poco penso io che prezzerebbe l'universale notizie acquistate con sì poca fatica, in comparazione di quelle, intorno alle quali si fanno lunghe ed inesplicabili altercazioni.

Salv. A quelli, i quali con gran brevità e chiarezza mostrano le fallacie di proposizioni state comunemente tenute per vere dall' universale, danno assai comportabile sarebbe il riportarne solamente disprezzo in luogo di aggradimento, ma bene spiacevole e molesto riesce cert' altro affetto, che suol talvolta destarsi in alcuni, che pretendendo nei medesimi studj almeno la parità con chiunque si sia, si vedono aver trapassate per vere conclusioni, che poi da un altro con breve e facile discorso vengono scoperte e dichiarate false. Io non chiamerò tale affetto invidia, solita a convertirsi poi in odio ed ira contro agli scopritori di tali fallacie, ma lo dirò uno stimolo, e una brama di voler più presto mantener gli errori inveterati, che permettere, che si ricevano le verità nuovamente scoperte, la qual brama talvolta gl' induce a scrivere in contraddizione a quelle verità pur troppo internamente conosciute anco da loro medesimi solo per tener bassa nel concetto del numeroso e poco intelligente vulgo l'altrui reputazione. Di simili conclusioni false ricevute per vere, e di agevolissima confutazione, non piccol numero ne ho io sentite dal nostro

Accademico, di parte delle quali ho anco tenuto registro.

Sagr. E V. S. non dovrà privarcene, ma a suo tempo farcene parte, quando ben anco bisognasse in grazia loro fare una particolar sessione. Per ora continuando il nostro filo parmi, che sin qui abbiamo fermata la definizione del moto uniformemente accelerato, del quale si tratta nei discorsi, che seguono, ed è:

Motum aequabiliter, seu uniformiter acceleratum dicimus eum, qui a quiete recedens temporibus aequalibus aequalia celeritatis momenta sibi superaddit.

Salv. Fermata cotal definizione un solo principio domanda, e suppone per vero l'Autore, cioè:

Accipio, gradus velocitatis ejusdem mobilis super diversas planorum inclinationes acquisitos tunc esse aequales, cum eorundem planorum elevationes aequales sint.

Chiama la elevazione di un piano inclinato la perpendicolare, che dal termine sublime di esso piano casca sopra la linea orizzontale prodotta per l'infimo termine di esso piano inclinato, come per intelligenza, essendo la linea B A parallela all'orizzonte, sopra il quale sieno inclinati li due piani C A, C D (Fig. XLIV.), la perpendicolare C B cadente sopra l'orizzontale B A, chiama l'Autore la elevazione dei piani C A, C D, e suppone, che i

gradi di velocità del medesimo mobile scendente per li piani inclinati C A, C D, acquistati nei termini A, D, sieno eguali, per esser la loro elevazione l'istessa C B. E tanto anco si dee intendere il grado di velocità, che il medesimo cadente dal punto C avrebbe nel termine B.

Sagr. Veramente mi par che tal supposto abbia tanto del probabile, che meriti di esser senza controversia conceduto, intendendo sempre, che si rimuovano tutti gl' impedimenti accidentarj ed esterni, e che i piani sieno ben solidi e tersi, ed il mobile di figura perfettissimamente rotonda, sicchè ed il piano, ed il mobile non abbiano scabrosità. Rimossi tutti i contrasti ed impedimenti, il lume naturale mi detta senza difficoltà, che una palla grave e perfettamente rotonda scendendo per le linee C A, C D, C B, giugnerebbe nei termini A, D, B, con impeti eguali.

Salv. Voi molto probabilmente discorrete, ma oltre al verisimile voglio con una esperienza crescer tanto la probabilità, che poco gli manchi all' agguagliarsi ad una ben necessaria dimostrazione. Figuratevi questo foglio essere una parete eretta all' orizzonte, e da un chiodo fitto in essa pendere una palla di piombo d'un'oncia, o due, sospesa dal sottil filo A B (Fig. XLV.) lungo due, o tre braccia perpendicolare all' orizzonte, e nella parete segnate una linea orizzontale D C se-

gante a squadra il perpendicolo A B, il quale sia lontano dalla parete due dita in circa, trasferendo poi il filo A B colla palla in A C, lasciate essa palla in libertà, la quale primieramente vedrete scendere descrivendo l'arco C B D, e di tanto trapassare il termine B, che scorrendo per l'arco B D sormonterà fino quasi alla segnata parallela C D, restando di pervenirvi per piccolissimo intervallo, toltogli il precisamente arrivarvi dall' impedimento dell' aria, e del filo. Dal che possiamo veracemente concludere, che l' impeto acquistato nel punto B dalla palla nello scendere per l'arco C B, fu tanto, che bastò a risospingersi per un simile arco B D alla medesima altezza; fatta, e più volte reiterata cotale esperienza, voglio, che ficchiamo nella parete rasente al perpendicolo A B un chiodo, come in E, ovvero in F, che sporga in fuori cinque, o sei dita; e questo acciocchè il filo A C tornando come prima a riportar la palla C per l'arco C B, giunta che ella sia in B, intoppando il filo nel chiodo E, sia costretta a camminare per la circonferenza B G descritta intorno al centro E, dal che vedremo quello, che potrà far quel medesimo impeto, che dianzi concepito nel medesimo termine B, sospinse l'istesso mobile per l' arco E D all' altezza dell'orizzontale C D. Ora, Signori, voi vedrete con gusto condursi la palla all' orizzontale

nel punto G, e l' istesso accadere, se l'intoppo si mettesse più basso, come in F, dove la palla descriverebbe l' arco B I, terminando sempre la sua salita precisamente nella linea C D, e quando l'intoppo del chiodo fusse tanto basso, che l'avanzo del filo sotto di lui non arrivasse all' altezza di C D, (il che accaderebbe, quando fusse più vicino al punto B, che al segamento dell' A B coll' orizzontale C D,) allora il filo cavalcherebbe il chiodo, e se gli avvolgerebbe intorno. Questa esperienza non lascia luogo di dubitare della verità del supposto: imperocchè essendo li due archi C B, D B eguali, e similmente posti, l' acquisto di momento fatto per la scesa nell' arco C B, è il medesimo, che il fatto per la scesa dell' arco D B; ma il momento acquistato in B per l'arco C B è potente a risospingere in su il medesimo mobile per l' arco B D; adunque anco il momento acquistato nella scesa D B è eguale a quello, che sospigne l'istesso mobile pel medesimo arco da B in D, sicchè universalmente ogni momento acquistato per la scesa d' un arco è eguale a quello, che può far risalire l' istesso mobile pel medesimo arco: ma i momenti tutti, che fanno risalire per tutti gli archi B D, B G, B I sono eguali, poichè son fatti dall' istesso medesimo momento acquistato per la scesa C B, come mostra l' esperienza: adunque tutti i momenti, che si acquista-

no per le scese negli archi D B, G B, I B sono eguali.

Sagr. Il discorso mi par concludentissimo, e l'esperienza tanto accomodata per verificare il postulato, che molto ben sia degno d'esser conceduto, come se fusse dimostrato.

Salv. Io non voglio, Sig. Sagredo, che noi ci pigliamo più del dovere, e massimamente che di questo assunto ci abbiamo a servire principalmente nei moti fatti sopra superficie rette, e non sopra curve, nelle quali l'accelerazione procede con gradi molto differenti da quelli, con i quali noi pigliamo, ch'ella proceda nei piani retti. Di modo che sebben l'esperienza addotta ci mostra, che la scesa per l'arco C B conferisce al mobile momento tale, che può ricondurlo alla medesima altezza per qualsivoglia arco B D, B G, B I, noi non possiamo con simile evidenza mostrare, che l'istesso accadesse, quando una perfettissima palla dovesse scendere per piani retti inclinati secondo le inclinazioni delle corde di questi medesimi archi, anzi è credibile, che formandosi angoli da essi piani retti nel termine B, la palla scesa per l'inclinato secondo la corda C B trovando intoppo nei piani ascendenti, secondo le corde B D, B G, B I nell'urtare in essi perderebbe del suo impeto, nè potrebbe salendo condursi all'altezza della linea C D. Ma levato l'intoppo, che pre-

giudica all' esperienza, mi par bene, che l' intelletto resti capace, che l' impeto (che in effetto piglia vigore dalla quantità della scesa) sarebbe potente a ricondurre il mobile alla medesima altezza. Prendiamo dunque per ora questo, come postulato, la verità assoluta del quale ci verrà poi stabilita dal vedere altre conclusioni fabbricate sopra tale ipotesi rispondere, e puntualmente confrontarsi colla esperienza. Supposto dall' Autore questo solo principio, passa alle proposizioni dimostrativamente concludendole, delle quali la prima è questa.

THEOR. I. PROP. I.

Tempus, in quo aliquod spatium a mobili conficitur latione ex quiete uniformiter accelerata, est aequale tempori, in quo idem spatium conficeretur ab eodem mobili motu aequabili delato, cujus velocitatis gradus subduplus sit ad summum et ultimum gradum velocitatis prioris motus uniformiter accelerati.

Repraesentetur per extensionem A B (Fig. XLVI.) tempus, in quo a mobili latione uniformiter accelerata ex quiete in C conficiatur spatium C D; graduum autem velocitatis adauctae in instantibus temporis A B maximus, et ultimus reprae-

sentetur per E B, utcunque super A B constitutam: junctaeque A E linae omnes ex singulis punctis linae A B ipsi B E aequidistanter actae crescentes velocitatis gradus post instans A repraesentabunt. Divisa deinde B E bifariam in F, ductisque parallelis F G, A G, ipsis B A, B F, Parallelogrammum A G F B eri tconstitutum triangulo A E B aequale, dividens suó latere G F bifariam A E in I: quod si parallelae trianguli A E B usque ad G I F extendantur, habebimus aggregatum parallelarum ominum in quadrilatero contentarum aequalem aggregatui comprehensarum in triangulo A E B; quae enim sunt in triangulo I E F, paria sunt cum contentis in triangulo G I A; eae vero quae habentur in trapezio A I F B, communes sunt. Cumque singulis ex omnibus instantibus temporis A B respondeant singula, et omnia puncta lineae A B, ex quibus actae parallelae in triangulo A E B comprehensae crescentes gradus velocitatis adauctae repraesentant, parallelae vero intra parallelogrammum contentae totidem gradus velocitatis non adauctae, sed aequabilis itidem repraesentent: apparet totidem velocitatis momenta absumpta esse in motu acceleratő juxta crescentes parallelas trianguli A E B, ac in motu aequabili juxta parallelas parallelogrammi G B: quod enim momentorum deficit in prima motus accelerati medietate, (deficiunt enim momen-

ta per parallelas trianguli A G I repraesentata,) reficitur a momentis per parallelas trianguli I E F repraesentatis. Patet igitur, aequalia futura esse spatia tempore eodem a duobus mobilibus peracta, quorum unum motu ex quiete uniformiter accelerato moveatur, alterum vero motu aequabili juxta momentum subduplum momenti maximi velocitatis accelerati motus, quod erat intentum.

THEOR. II. PROP. II.

Si aliquod Mobile motu uniformiter accelerato descendat ex quiete, spatia quibuscunque temporibus ab ipso peracta sunt inter se in duplicata ratione eorundem temporum: nempe ut eorundem temporum quadrata.

Intelligatur fluxus temporis ex aliquo primo instanti A repraesentari per extensionem A B (Fig. XLVII.) in qua sumantur duo quaelibet tempora A D, A E; sitque H I linea, in qua mobile ex puncto H, tanquam primo motus principio, descendat uniformiter acceleratum; sitque spatium H L peractum primo tempore A D, H M vero sit spatium per quod descenderit in tempore A E. Dico spatium M H ad spatium H L esse in duplicata ratione ejus, quam habet tempus E A ad tempus A D. Seu dicamus, spatia M H, H L, ean-

dem habere rationem quam habent quadrata E A, A D. Ponatur linea A C, quemcunque angulum cum ipsa A B continens; ex punctis vero D, E ductae sint parallelae D O, E P, quarum D O repraesentabit maximum gradum velocitatis acquisitae in instanti D temporis A D; P E vero maximum gradum velocitatis acquisitae in instanti E temporis A E. Quia vero supra demonstratum est, quod attinet ad spatia peracta, aequalia esse inter se illa, quorum alterum conficitur a mobili ex quiete motu uniformiter accelerato; alterum vero, quod tempore eodem conficitur a mobili motu aequabili delato, cujus velocitas subdupla sit maximae in motu accelerato acquisitae; constat, spatia M H, L H, esse eadem, quae motibus aequalibus, quorum velocitates essent ut dimidiae P E, O D, conficerentur in temporibus E A, D A. Si igitur ostensum fuerit, haec spatia M H, L H, esse in duplicata ratione temporum E A, D A; intentum probatum erit. Verum in quarta propositione primi libri demonstratum est, mobilium aequabili motu latorum spatia peracta habere inter se rationem compositam ex ratione velocitatum, et ex ratione temporum: hic autem ratio velocitatum est eadem cum ratione temporum, (quam enim rationem habet dimidia P E ad dimidiam O D, seu tota P E ad totam O D, hanc habet A E ad A D,) ergo ratio spatiorum peracto-

rum dupla est rationis temporum, quod erat demonstrandum.

Patet etiam hinc, eandem spatiorum rationem esse duplam rationis maximorum graduum velocitatis: nempe linearum P E, O D, cum sit P E ad O D, ut E A ad D A.

COROLLARIUM I.

Hinc manifestum est, quod si fuerint quotcunque tempora aequalia consequenter sumpta a primo instanti seu principio lationis, ut puta A D, D E, E F, F G, *quibus conficiantur spatia* H L, L M, M N, N I, *ipsa spatia erunt inter se, ut numeri impares ab unitate, scilicet ut* 1; 3, 5, 7. *Haec enim est ratio excessuum quadratorum linearum sese aequaliter excedentium, et quarum excessus est aequalis minimae ipsarum: seu dicamus quadratorum sese ab unitate consequentium. Dum igitur gradus velocitatis augentur juxta seriem simplicem numerorum in temporibus aequalibus, spatia peracta iisdem tempobus incrementa suscipiunt juxta seriem numerorum imparium ab unitate.*

Sagr. Sospendete in grazia alquanto la lettura, mentre io vo ghiribizzando intorno a certo concetto pur ora cascatomi in mente, per la spiegazione del quale per mia, e per vostra più chiara intelligenza fo un poco di disegno, dove mi figuro per la linea A I (Fig. XLVIII.) la conti-

nuazione del tempo dopo il primo instante in A, applicando poi in A secondo qualsivoglia angolo la retta A F, e congiugnendo i termini I, F, diviso il tempo A I in mezzo in C, tiro la C B paralella alla I F. Considerando poi la C B, come grado massimo della velocità, che cominciando dalla quiete nel primo instante del tempo A, si andò augumentando secondo il crescimento delle paralelle alla B C, prodotte nel triangolo A B C, (che è il medesimo, che crescere secondo che cresce il tempo,) ammetto senza controversia per i discorsi fatti fin qui, che lo spazio passato dal mobile cadente colla velocità accresciuta nel detto modo sarebbe eguale allo spazio, che passerebbe il medesimo mobile, quando si fosse nel medesimo tempo A C mosso di moto uniforme, il cui grado di velocità fosse eguale all' E C metà del B C. Passo ora più oltre, e figuratomi il mobile sceso con moto accelerato trovarsi nell'istante C, avere il grado di velocità B C, è manifesto, che se egli continuasse di muoversi coll' istesso grado di velocità B C senza più accelerarsi, passerebbe nel seguente tempo C I, spazio doppio di quello, che si passò nell' egual tempo A C, col grado di velocità uniforme E C metà del grado B C. Ma perchè il mobile scende con velocità accresciuta sempre uniformemente in tutti i tempi eguali, aggiugnerà al grado C B nel seguente tempo C I quei momenti me-

desimi, di velocità crescente secondo le parallele del triangolo B F G eguale al triangolo A B C. Sicchè aggiunto al grado di velocità G I la metà del grado F G, massimo degli acquistati nel moto accelerato, e regolati dalle parallele del triangolo B F G, avremo il grado di velocità I N, col quale di moto uniforme si sarebbe mosso nel tempo C I; il qual grado I N essendo triplo del grado E C convince lo spazio passato nel secondo tempo C I, dovere esser triplo del passato nel primo tempo C A. E se noi intenderemo essere aggiunta all' A I un' altra egual parte di tempo I O, ed accresciuto il triangolo sino in A P. O, è manifesto, che quando si continuasse il moto per tutto il tempo I O col grado di velocità I F, acquistato nel moto accelerato nel tempo A I, essendo tal grado I F quadruplo dell' E C, lo spazio passato nel tempo I O sarebbe quadruplo del passato nell' egual primo tempo A C, ma continuando l' accrescimento dell' uniforme accelerazione nel triangolo F P Q, simile a quello del triangolo A B C, che ridotto a moto equabile aggiugne il grado eguale all' E C, aggiunto il Q R eguale all' E C, avremo tutta la velocità equabile esercitata nel tempo I O quintupla dell' equabile del primo tempo A C, e però lo spazio passato quintuplo del passato nel primo tempo A C. Vedesi dunque anco in questo semplice

calcolo gli spazj passati in tempi eguali dal mobile, che partendosi dalla quiete va acquistando velocità, conforme all' accrescimento del tempo, esser tra di loro come i numeri impari *ab unitate* 1 3 5 e congiuntamente presi gli spazj passati, il passato nel doppio tempo esser quadruplo del passato nel sudduplo, il passato nel tempo triplo esser nonuplo, ed in somma gli spazj passati essere in duplicata proporzione dei tempi, cioè come i quadrati di essi tempi.

Simpl. Io veramente ho preso più gusto in questo semplice e chiaro discorso del Sig. Sagr. che nella per me più oscura dimostrazione dell' Autore: sicchè io resto assai ben capace, che il negozio debba succeder così, posta, e ricevuta la definizione del moto uniformemente accelerato. Ma se tale sia poi l' accelerazione, della quale si serve la natura nel moto de' suoi gravi discendenti, io per ancora ne resto dubbioso, e però per intelligenza mia, e di altri simili a me, parmi che sarebbe stato opportuno in questo luogo arrecar qualche esperienza di quelle, che si è detto esservene molte, che in diversi casi s' accordano colle conclusioni dimostrate.

Salv. Voi da vero scienziato fate una ben ragionevol domanda, e così si costuma e conviene nelle scienze, le quali alle conclusioni naturali applicano le dimostrazioni matematiche, come si vede nei Perspettivi, negli Astronomi, nei Meccanici,

nei Musici, ed altri, li quali con sensate esperienze confermano i principj loro, che sono i fondamenti di tutta la seguente struttura: e però non voglio, che ci paja superfluo, se con troppa lunghezza avremo discorso sopra questo primo e massimo fondamento, sopra il quale s' appoggia l'immensa macchina d' infinite conclusioni, delle quali solamente una piccola parte ne abbiamo in questo libro poste dall'Autore, il quale avrà fatto assai ad aprir l' ingresso, e la porta stata finor serrata agl'ingegni speculativi. Circa dunque all'esperienze non ha tralasciato l' Autor di farne, e per assicurarsi che l' accelerazione dei gravi naturalmente discendenti segua nella proporzione sopraddetta, molte volte mi son ritrovato io a farne la prova nel seguente modo, in sua compagnia.

In un regolo, o vogliam dir corrente di legno lungo circa 12 braccia, e largo per un verso mezzo braccio, e per l'altro 3 dita, si era in questa minor larghezza incavato un canaletto poco più largo di un dito. Tiratolo dirittissimo, e per averlo ben pulito, e liscio, incollatovi dentro una carta pecora zannata, e lustrata al possibile, si faceva in esso scendere una palla di bronzo durissimo ben rotondata e pulita. Costituito che si era il detto regolo pendente, elevando sopra il piano orizzontale una delle sue estremità, un braccio o due ad arbitrio, si lasciava (come

dico) scendere per lo detto canale la palla, notando nel modo, che appresso dirò, il tempo che consumava nello scorrerlo tutto: replicando il medesimo atto molte volte, per assicurarsi bene della quantità del tempo, nel quale non si trovava mai differenza, nè anco della decima parte di una battuta di polso. Fatta, e stabilita precisamente tale operazione, facemmo scender la medesima palla solamente per la quarta parte della lunghezza di esso canale: e misurato il tempo della sua scesa, si trovava sempre puntualissimamente esser la metà dell'altro. E facendo poi l'esperienze di altre parti, esaminando ora il tempo di tutta la lunghezza col tempo della metà, e con quello delli $\frac{2}{3}$ o dei $\frac{3}{4}$ o in conclusione con qualunque altra divisione, per esperienze ben cento volte replicate sempre s' incontrava gli spazj passati esser tra di loro come i quadrati dei tempi: e questo in tutte le inclinazioni del piano, cioè del canale, nel quale si faceva scender la palla. Dove osservammo ancora i tempi delle scese per diverse inclinazioni mantenere esquisitamente tra di loro quella proporzione, che più a basso troveremo essergli assegnata e dimostrata dall' Autore. Quanto poi alla misura del tempo, si teneva una gran secchia piena di acqua attaccata in alto, la quale per un sottil cannellino saldatogli nel fondo,

versava un sottil filo di acqua, che si andava ricevendo con un picciol bicchiere per tutto il tempo, che la palla scendeva nel canale, e nelle sue parti: le particelle poi dell'acqua in tal guisa raccolte si andavano di volta in volta con esattissima bilancia pesando; dandoci le differenze, e proporzioni dei pesi loro le differenze, e proporzioni dei tempi: e questo con tal giustezza, che, come ho detto, tali operazioni molte e molte volte replicate giammai non differivano di un notabil momento.

Simp. Gran soddisfazione avrei ricevuta nel trovarmi presente a tali esperienze, ma sendo certo della vostra diligenza nel farle, e fedeltà nel riferirle, mi quieto, e le ammetto per sicurissime, e vere.

Salv. Potremo dunque ripigliar la nostra lettura, e seguitare avanti.

COROLLARIUM II.

Colligitur secundo, quod si a principio lationis sumantur duo spatia quaelibet, quibuslibet temporibus peracta, tempora ipsorum erunt inter se, ut alterum eorum ad spatium medium proportionale inter ipsa. Sumptis enim a principio lationis S (Fig. XLIX.) *duobus spatiis* S T, S V; *quorum medium sit proportionale* S

X; tempus casus per S T *ad tempus casus per* S V *erit, ut* S T *ad* S X: *seu dicamus, tempus per* S V *ad tempus per* S T *esse, ut* V S *ad* S X. *Cum enim demonstratum sit, spatia peracta esse in duplicata ratione temporum, seu (quod idem est) esse ut temporum quadrata; ratio autem spatii* V S *ad spatium* S T *sit dupla rationis* V S *ad* S X, *seu sit eadem, quam habent quadrata* V S, S X; *patet, rationem temporum lationum per* S V, S T *esse, ut spatiorum, seu linearum* V S, S X.

SCHOLIUM.

Id autem, quod demonstratum est in lationibus peractis in perpendiculis, intelligatur etiam itidem contingere in planis utcunque inclinatis; in iisdem enim assumptum est accelerationis gradus eadem ratione augeri, nempe secundum temporis incrementum, seu dicas secundum simplicem, ac primam numerorum seriem.

Salv. Qui vorrei, Sig. Sagredo, che a me ancora fosse permesso, sebben forse con troppo tedio del Sig. Simplicio, il differir per un poco la presente lettura, fin ch' io possa esplicare quanto dal detto è dimostrato fin' ora, e congiuntamente dalla notizia di alcune conclusioni meccaniche apprese già dal nostro Accademico, sov-

viemmi adesso di poter soggiugnere per maggior confermazione della verità del principio, che sopra con probabili discorsi ed esperienze fu da noi esaminato; anzi quello più importa per geometricamente concluderlo, dimostrando prima un sol Lemma elementare nella contemplazione degl' impeti.

Sagr. Mentre tale debba esser l'acquisto, quale V. S. ci promette, non vi è tempo, che da me volentierissimo non si spendesse, trattandosi di confermare, e interamente stabilire queste scienze del moto: e quanto a me non solo vi concedo il poter soddisfarvi in questo particolare, ma di più pregovi ad appagare quanto prima la curiosità, che mi avete in esso svegliata; e credo che il Signor Simplicio abbia ancora il medesimo sentimento.

Simp. Non posso dire altrimenti.

Salv. Giacchè dunque me ne date licenza, considerisi in primo luogo come effetto notissimo, che i momenti, o le velocità di un istesso mobile son diverse sopra diverse inclinazioni di piani, e che la massima è per la linea perpendicolarmente sopra l'orizzonte elevata, e che per l'altre inclinate si diminuisce tal velocità, secondo che quelle più dal perpendicolo si discostano, cioè più obbliquamente s'inclinano, onde l'impeto, il talento, l'energia, o vogliamo dire il momento del di-

scendere vien diminuito nel mobile dal piano soggetto, sopra il quale esso mobile s'appoggia, e discende.

E per meglio dichiararmi, intendasi la linea A B, (Fig. L.) perpendicolarmente eretta sopra l'orizzonte A C, pongasi poi la medesima in diverse inclinazioni verso l'orizzonte piegata, come in A D, A E, A F, ec. dico l'impeto massimo e totale del grave per discendere esser per la perpendicolare B A, minor di questo per la D A, e minore ancora per la E A, e successivamente andarsi diminuendo per la più inclinata F A, e finalmente esser del tutto estinto nella orizzontale C A, dove il mobile si trova indifferente al moto e alla quiete, e non ha per se stesso inclinazione di muoversi verso alcuna parte, nè meno alcuna resistenza all'esser mosso; poichè siccome è impossibile, che un grave o un composto di essi si muova naturalmente all'in su discostandosi dal comun centro, verso dove conspirano tutte le cose gravi, così è impossibile, che egli spontaneamente si muova, se con tal moto il suo proprio centro di gravità non acquista avvicinamento al suddetto centro comune: onde sopra l'orizzontale, che qui s'intende per una superficie egualmente lontana dal medesimo centro, e perciò affatto priva d'inclinazione, nullo sarà l'impeto o momento di detto mobile. Appresa questa mutazione

d' impeto, mi fa qui mestier esplicare quello, che in un antico trattato di meccaniche scritto già in Padova dal nostro Accademico sol per uso de' suoi Discepoli fu diffusamente e concludentemente dimostrato, in occasione di considerare l'origine e natura del maraviglioso strumento della vite, ed è, con qual proporzione si faccia tal mutazione d' impeto, per diverse inclinazioni de' piani, come per esempio, del piano inclinato A F, tirando la sua elevazione sopra l' orizzonte, cioè la linea F C, per la quale l' impeto di un grave, ed il momento del discendere è il massimo, cercasi qual proporzione abbia questo momento al momento dell' istesso mobile per l' inclinata F A. Qual proporzione dico esser reciproca delle dette lunghezze, e questo sia il Lemma da premettersi al Teorema, che dopo io spero di poter dimostrare. Qui è manifesto tanto esser l' impeto del discendere di un grave, quanta è la resistenza, o forza minima, che basta per proibirlo, e fermarlo: per tal forza, e resistenza, e sua misura, mi voglio servire della gravità di un altro mobile. Intendasi ora sopra il piano F A posare il mobile G legato con un filo, che cavalcando sopra l' F abbia attaccato un peso H, e consideriamo, che lo spazio della scesa, o salita a perpendicolo di esso, è ben sempre eguale a tutta la salita, o scesa dell' altro mobile G per l' inclinata

A F, ma non già alla salita, o scesa a perpendicolo, nella qual sola esso mobile G (siccome ogni altro mobile) esercita la sua resistenza, il che è manifesto; imperocchè considerando nel triangolo A F C il moto del mobile G, per esempio all' in su da A in F, esser composto del trasversale orizzontale A C, e del perpendicolare C F, ed essendo che quanto all' orizzontale nessuna, come si è detto, è la resistenza del medesimo all' esser mosso (non facendo con tal moto perdita alcuna, nè meno acquisto in riguardo della propria distanza dal comun centro delle cose gravi, che nell' orizzonte si conserva sempre l' istessa) resta la resistenza esser solamente rispetto al dover salire la perpendicolare C F. Mentre che dunque il grave G movendosi da A in F resiste solo nel salire lo spazio perpendicolare C F, ma che l'altro grave H scende a perpendicolo necessariamente, quanto tutto lo spazio F A, e che tal proporzione di salita, e scesa si mantiene sempre l' istessa, poco o molto che sia il moto dei detti mobili (per esser collegati insieme) possiamo assertivamente affermare, che quando debba seguire l' equilibrio, cioè la quiete tra essi mobili, i momenti, le velocità, o le lor propensioni al moto, cioè gli spazj, che da loro si passerebbero nel medesimo tempo, devon rispondere reciprocamente alle loro gravità, secondo quello, che in tutti

i casi de'movimenti meccanici si dimostra, sicchè basterà per impedire la scesa del G, che lo H sia tanto men grave di quello, quanto a proporzione lo spazio C F è minore dello spazio F A. Sia fatto dunque come F A ad F C, così il grave G al grave H, che allora seguirà l'equilibrio, cioè i gravi H, G averanno momenti eguali, e cesserà il moto dei detti mobili. E perchè siamo convenuti, che di un mobile tanto sia l'impeto, l'energia, il momento, o la propensione al moto, quanta è la forza, o resistenza minima, che basta a fermarlo, e s'è concluso, che il grave H è bastante a proibire il moto al grave G; adunque il minor peso H, che nella perpendicolare F C esercita il suo momento totale, sarà la precisa misura del momento parziale, che il maggior peso G esercita per lo piano inclinato F A; ma la misura del total momento del medesimo grave G è egli stesso, (poichè per impedire la scesa perpendicolare di un grave si richiede il contrasto di altrettanto grave, che pur sia in libertà di moversi perpendicolarmente); adunque l'impeto, o momento parziale del G per l'inclinata F A all'impeto massimo, e totale dell'istesso G per la perpendicolare F C starà, come il peso H al peso G, cioè per la costruzione come essa perpendicolare F C, elevazione dell' inclinata, alla medesima inclinata F A, che è quello, che per Lemma si pro-

pose di dimostrare, che dal nostro Autore, come vedranno, vien supposto per noto nella seconda parte della sesta proposizione del presente trattato.

Sagr. Da questo, che V. S. ha concluso fin qui, parmi che facilmente si possa dedurre, argomentando *ex aequali* colla proporzione perturbata, che i momenti dell'istesso mobile, per piani diversamente inclinati come F A, F I, che abbiano l' istessa elevazione, son fra loro in reciproca proporzione de' medesimi piani.

Salv. Verissima conclusione. Fermato questo, passerò adesso a dimostrare il Teorema, cioè, che

I gradi di velocità di un mobile discendente con moto naturale dalla medesima sublimità per piani in qualsivoglia modo inclinati, all'arrivo all' orizzonte son sempre eguali, rimossi gli impedimenti.

Qui deesi prima avvertire, che stabilito, che in qualsivogliano inclinazioni il mobile dalla partita dalla quiete vada crescendo la velocità, o la quantità dell'impeto colla proporzione del tempo (secondo la definizione data dall' Autore al moto naturalmente accelerato) onde, come egli ha per l' antecedente proposizione dimostrato, gli spazj passati sono in duplicata proporzione dei tempi, e conseguentemente de' gradi di velocità; quali furono gl' impeti nella prima mossa, tali proporzionalmente saranno i gradi dalle velocità guadagnati nell' istesso

tempo, poichè e questi, e quelli crescono colla medesima proporzione nel medesimo tempo.

Ora sia il piano inclinato A B (Fig. LI.) la sua elevazione sopra l'orizzonte la perpendicolare A C, e l'orizzontale C B; e perchè, come poco fa si è concluso, l'impeto di un mobile per la perpendicolare A C all'impeto del medesimo per l'inclinata A B sta, come A B ad A C, prendasi nell'inclinata A B la A D terza proporzionale delle A B, A C; l'impeto dunque per A C all'impeto per la A B, cioè per la A D, sta come la A C all'A D, e perciò il mobile nell'istesso tempo, che passerebbe lo spazio perpendicolare A C, passerà ancora lo spazio A D nell'inclinata A B, (essendo i momenti come gli spazj) ed il grado di velocità in C al grado di velocità in D averà la medesima proporzione della A C alla A D; ma il grado di velocità in B al medesimo grado in D sta, come il tempo per A B al tempo per A D, per la definizione del moto accelerato, ed il tempo per A B al tempo per A D sta, come la medesima A C media tra le B A, A D, alla A D, per l'ultimo corollario della seconda proposizione, adunque i gradi in B, ed in C, al grado in D, hanno la medesima proporzione della A C alla A D, e però sono eguali, che è il Teorema, che intesi di dimostrare.

Di questo potremo più concludentemente provare la seguente terza proposizione dell'Autore, nella quale egli si vale del principio, ed è, che il tempo per l'inclinata al tempo per la perpendicolare, ha l'istessa proporzione di essa inclinata, e perpendicolare. Imperocchè diciamo, quando B A sia il tempo per A B, il tempo per A D sarà la media tra esse, cioè la A C, per lo secondo Corollario della seconda proposizione; ma quando A C sia il tempo per A D, sarà anco il tempo per A C, per essere le A D, A C scorse in tempi eguali, e però quando B A sia il tempo per A B, A C sarà il tempo per A C, adunque come A B ad A C, così il tempo per A B, al tempo per A C.

Col medesimo discorso si proverà, che il tempo per A C al tempo per altra inclinata A E sta, come la A C alla A E; adunque *ex aequali* il tempo per l'inclinata A B al tempo dell'inclinata A E sta omologamente, come la A B alla A E, ec.

Potevasi ancora dall'istesso progresso del Teorema, come vedrà benissimo il Signor Sagr. dimostrar immediatamente la sesta proposizione dell'Autore; ma basti per ora tal digressione, che forse gli è riuscita troppo tediosa, benchè veramente di profitto in queste materie del moto.

Sagr. Anzi di mio grandissimo gusto, e necessarissima alla perfetta intelligenza di quel principio.

Salv. Ripiglierò dunque la lettura del testo.

THEOR. III. PROP. III.

Si super plano inclinato, atque in perpendiculo, quorum eadem sit altitudo, feratur ex quiete idem mobile, tempora lationum erunt inter se ut plani ipsius, et perpendiculi longitudines.

Sit planum inclinatum A C (Fig. LII.) et perpendiculum A B, quorum eadem sit altitudo supra horizontem C B, nempe ipsamet linea B A: Dico, tempus descensus ejusdem mobilis super plano A C, ad tempus casus in perpendiculo A B, eam habere rationem, quam habet longitudo plani A C ad ipsius perpendiculi A B longitudinem. Intelligantur enim quotlibet lineae D G, E I, F L, horizonti C B parallelae: constat ex assumpto, gradus velocitatis mobilis ex A primo motus initio in punctis G D acquisitos esse aequales, cum accessus ad horizontem æquales sint: similiter gradus in punctis I, E iidem erunt: nec non gradus in L, et F. Quod si non hae tantum parallelae, sed ex punctis omnibus lineae A B usque ad lineam A C protractae intelligantur; momenta, seu gradus velocitatum in terminis singularum parallelarum semper erunt inter se paria. Conficiantur itaque spatia duo A C, A B iisdem gradibus velocitatis. Sed de-

monstratum est, quod si duo spatia conficiantur a mobili, quod iisdem velocitatis gradibus feratur, quam rationem habent ipsa spatia, eandem habent tempora lationum, ergo tempus lationis per A C ad tempus per A B est, ut longitudo plani A C ad longitudinem perpendiculi A B. Quod erat demostrandum.

Sagr. Parmi, che assai chiaramente e con brevità si poteva concludere il medesimo, essendosi già concluso, che la somma del moto accelerato dei passaggi per A C, A B è quanto il moto equabile, il cui grado di velocità sia sudduplo al grado massimo C B; essendo dunque passati li due spazj A C, A B coll'istesso moto equabile, già è manifesto per la proposizione prima del primo, che i tempi de' passaggi saranno come gli spazj medesimi.

COROLLARIUM.

Hinc colligitur, tempora descensuum super planis diversimode inclinatis, dum tamen eorum eadem sit elevatio, esse inter se, ut eorum longitudines. Si enim intelligatur aliud planum A M *ex* A *ad eundem horizontem* C B *terminatum, demonstrabitur pariter, tempus descensus per* A M *ad tempus per* A B *esse, ut linea* A M *ad* A B; *ut autem tempus* A B *ad tempus per* A C, *ita linea* A B *ad* A C;

ergo ex aequali, ut A M *ad* A C, *ita tempus per* A M *ad tempus per* A C.

THEOR. IV. PROP. IV.

Tempora lationum super planis aequalibus, sed inaequaliter inclinatis sunt inter se in subdupla ratione elevationum eorundem planorum permutatim accepta.

Sint ex eodem termino B (Fig. LIII.) plana aequalia, sed inaequaliter inclinata, B A, B C, et ductis A E, C D, lineis horizontalibus ad perpendiculum usque B D: esto plani B A elevatio B E, plani vero B C elevatio sit B D, et ipsarum elevationum D B, B E media proportionalis sit B I; constat, rationem D B ad B I esse subduplam rationis D B ad B E. Dico jam, rationem temporum descensuum, seu lationum super planis B A, B C, esse eandem cum ratione D B ad B I permutatim assumpta: ut scilicet temporis per B A homologa sit elevatio alterius plani B C, nempe B D, temporis vero per B C homologa sit B I. Demonstrandum proinde est, tempus per B A ad tempus per B C esse, ut D B ad B I. Ducatur I S, ipsi D C aequidistans; et quia jam demonstratum est, tempus descensus per B A ad tempus casus per perpendiculum B E esse, ut ipsa B A ad B E: tempus vero per B E ad tempus per B D, ut B E ad B I, tempus vero per B D ad tempus per B C, ut B D ad B C, seu B I ad B S; ergo ex aequali tempus per B A ad tempus per B C erit,

ut B A ad B S, seu C B, ad B S, est autem C B ad B S, ut D B ad B I; ergo patet propositum.

THEOR. V. PROP. V.

Ratio temporum descensuum super planis, quorum diversae sint inclinationes, et longitudines, nec non elevationes inaequales, componitur ex ratione longitudinum ipsorum planorum, et ex ratione subdupla elevationum eorundem permutatim accepta.

Sint plana A B, A C (Fig. LIV.) diversimode inclinata, quorum longitudines sint inaequales et inaequales quoque elevationes. Dico, rationem temporis descensus per A C ad tempus per A B compositam esse ex ratione ipsius A C ad A B, et ex subdupla elevationum earundem permutatim accepta. Ducatur enim perpendiculum A D, cui occurrant horizontales B G, C D, et inter elevationes D A, A G media sit A L; ex puncto vero L ducta parallela horizonti occurrat plano A C in F, erit quoque A F media inter C A, A E. Et quia tempus per A C ad tempus per A E est, ut linea F A ad A E, tempus vero per A E ad tempus per A B, ut eadem A E ad eandem A B: patet, tempus per A C ad tempus per A B esse, ut A F ad A B. Demonstrandum itaque restat, rationem A F ad A B componi ex ratione

C A ad A B, et ex ratione G A ad A L, quae est ratio subdupla elevationum D A, A G permutatim accepta. Id autem manifestum fit, posita C A inter F A, A B: ratio enim F A ad A C est eadem cum ratione L A ad A D, seu G A ad A L; quae est subdupla rationis elevationum G A, A D, et ratio C A ad A B est ipsamet ratio longitudinum; ergo patet propositum.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si a puncto sublimi, vel imo circuli ad horizontem erecti ducantur quaelibet plana usque ad circumferentiam inclinata, tempora descensuum per ipsa erunt aequalia.

Sit circulus ad horizontem G H (Fig. LV.) erectus, cujus ex imo puncto, nempe ex contactu cum horizontali sit erecta diameter F A, et ex puncto sublimi A plana quaelibet inclinentur usque ad circumferentiam A B, A C. Dico tempora descensuum per ipsa esse aequalia. Ducantur B D, C E ad diametrum perpendiculares, et inter planorum E A, A D altitudines media sit proportionalis A I. Et quia rectangula F A E, F A D aequalia sunt quadratis A C, A B; ut autem rectangulum F A E ad rectangulum F A D, ita E A ad A D; ergo ut quadratum C A

ad quadratum A B, ita E A linea ad lineam A D. Verum ut linea E A ad D A, ita quadratum I A ad quadratum A D; ergo quadrata linearum C A, A B sunt inter se, ut quadrata linearum I A, A D, et ideo ut C A linea ad A B. ita I A ad A D. At in praecedenti demonstratum est, rationem temporis descensus per A C, ad tempus descensus per A B, componi ex rationibus C A ad A B et D A ad A I, quae est eadem cum ratione B A ad A C; ergo ratio temporis descensus per A C ad tempus descensus per A B componitur ex rationibus C A ad A B, et B A ad A C. Est igitur ratio eorundem temporum ratio aequalitatis, ergo patet propositum.

Idem aliter demonstratur ex Mechanicis, nempe in sequenti figura mobile temporibus aequalibus pertransire C A, D A (Fig. LVI.) Sit enim B A aequalis ipsi DA, et ducantur perpendiculares B E, D F, constat ex elementis mechanicis momentum ponderis super plano secundum lineam A B C elevato ad momentum suum totale esse, ut B E ad B A, ejusdemque ponderis momentum super elevatione A D ad totale suum momentum esse, ut D F ad D A, vel B A: ergo ejusdem ponderis momentum super plano secundum D A inclinato ad momentum super inclinatione secundum A B C est, ut linea D F ad lineam B E. Quare spatia, quae pertransibit idem pondus temporibus aequali-

bus super inclinationibus C A, D A, erunt inter se, ut lineae B E, D F, ex propositione secunda primi libri. Verum ut B E ad D F, ita demonstratur se habere A C ad D A; ergo idem mobile temporibus aequalibus pertransit lineas C A, D A

Esse autem ut B E ad D F, ita C A ad D A, ita demonstratur:

Jungatur C D, et per D, et B ipsi A F parallelae agantur D G L, secans C A in puncto I, et B H: eritque angulus A D I aequalis angulo D C A, cum circumferentiis L A, A D æqualibus insistant, estque angulus D A C communis: ergo triangulorum æquiangulorum C A D, D A I latera circa æquales angulos proportionalia erunt, et ut C A ad A D, ita D A ad A I, id est B A ad A I, seu H A ad A G, hoc est B E ad D F: quod erat probandum.

Aliter idem magis expedite demonstrabitur sic.

Sit ad horizontem A B (Fig. LVII.) erectus circulus, cujus diameter C D ad horizontem sit perpendicularis; ex termino autem sublimi D inclinetur ad circumferentiam usque quodlibet planum D F. Dico descensum per planum D F, et casum per diametrum D C ejusdem mobilis temporibus æqualibus absolvi. Ducatur enim F G horizonti A B parallela, quæ erit ad diametrum D C perpendicularis,

et connectatur F C; et quia tempus casus per D C ad tempus casus per D G est, ut media proportionalis inter C D, D G ad ipsam D G: media autem inter C D, D G est D F, cum angulus D F C in semicirculo sit rectus, et F G perpendicularis ad D C: tempus itaque casus per D C ad tempus casus per D G est ut linea F D ad D G. Sed jam demonstratum est, tempus descensus per D F ad tempus casus per D G esse, ut eadem linea D F ad D G; tempora igitur descensus per D F, et casus per D C ad idem tempus casus per D G eandem habent rationem, ergo sunt æqualia. Similiter demonstrabitur, si ab imo termino C elevetur chorda C E ducta E H horizonti parallela, et juncta E D, tempus descensus per E C, æquari tempori casus per diametrum D C.

COROLLARIUM I.

Hinc colligitur, tempora descensuum per chordas omnes ex terminis C, seu D perductas esse inter se aequalia.

COROLLARIUM II.

Colligitur etiam, quod si ab eodem puncto descendant perpendiculum et planum inclinatum, super quae descensus

fiant temporibus aequalibus, eadem esse in semicirculo, cujus diameter est perpendiculum ipsum.

COROLLARIUM III.

Hinc colligitur lationum tempora super planis inclinatis tunc esse aequalia, quando elevationes partium aequalium eorundem planorum fuerint inter se, ut eorundem planorum longitudines: ostensum enim est, tempora per C A, D A *in penultima figura esse aequalia, dum elevatio partis* A B *aequalis* A D, *nempe* B E, *ad elevationem* D F *fuerit, ut* C A *ad* D A.

Sagr. Sospenda in grazia V. S. per un poco la lettura delle cose, che seguono, sin che io mi vo risolvendo sopra certa contemplazione, che pur ora mi si rivolge per la mente, la quale, quando non sia una fallacia, non è lontana dall' essere uno scherzo grazioso, quali son tutti quelli della natura, o della necessità.

È manifesto, che se da un punto segnato in un piano orizzontale si faranno produr sopra il medesimo piano infinite linee rette per tutti i versi, sopra ciascuna delle quali s' intenda muoversi un punto con moto equabile, cominciandosi a muover tutti nell' istesso momento di tempo dal segnato punto, e che sieno le ve-

locità di tutti eguali, si verranno conseguentemente a figurar da essi punti mobili circonferenze di cerchi tuttavia maggiori e maggiori, concentrici tutti intorno al primo punto segnato, giusto in quella maniera, che vediamo farsi dall' ondette dell' acqua stagnante, dopo che da alto vi sia caduto un sassetto, la percossa del quale serve per dar principio di moto verso tutte le parti, e resta come centro di tutti i cerchi, che vengon disegnati successivamente maggiori e maggiori da esse ondette. Ma se noi intenderemo un piano eretto all' Orizzonte, ed in esso piano notato un punto sublime, dal quale si partano infinite linee inclinate secondo tutte le inclinazioni, sopra le quali ci figuriamo discender mobili gravi, ciascheduno con moto naturalmente accelerato con quelle velocità, che alle diverse inclinazioni convengono; posto che tali mobili discendenti fusser continuamente visibili, in che sorte di linee gli vedremo noi continuamente disposti? Qui nasce la mia maraviglia, mentre le precedenti dimostrazioni mi assicurano, che si vedranno sempre tutti nell' istessa circonferenza di cerchi successivamente crescenti, secondo che i mobili nello scendere si vanno più e più successivamente allontanando dal punto sublime, dove fu il principio della lor caduta, e per meglio dichiararmi segnisi il punto sublime A, (LVIII.) dal quale discendano

linee secondo qualsivogliano inclinazioni A F, A H, e la perpendicolare A B, nella quale presi i punti C, D descrivansi intorno ad essi cerchi, che passino nel punto A, segando le linee inclinate nei punti F H B, E G I. È manifesto, per le antecedenti dimostrazioni, che partendosi nell' istesso tempo dal termine A mobili discendenti per esse linee, quando l' uno sarà in E, l' altro sarà in G, e l' altro in I, e così continuando di scendere si troveranno nell' istesso momento di tempo in F, H, B, e continuando di muoversi questi, ed altri infiniti per le infinite diverse inclinazioni si troveranno sempre successivamente nelle medesime circonferenze fatte maggiori e maggiori in infinito. Dalle due specie dunque di moti, delle quali la natura si serve, nasce con mirabil corrispondente diversità la generazione di cerchi infiniti. Quella si pone, come in sua sede, e principio originario nel centro d' infiniti cerchi concentrici, questa si costituisce nel contatto sublime delle infinite circonferenze di cerchi tutti tra loro eccentrici. Quelli nascono da moti tutti eguali ed equabili; questi da moti tutti sempre inequabili in se stessi, e diseguali l' uno dall' altro tutti, che sopra le differenti infinite inclinazioni si esercitano. Ma più aggiunghiamo, che se dai due punti assegnati per le emanazioni noi intenderemo eccitarsi linee non per due

superficie sole orizzontale ed eretta, ma per tutti i versi, siccome da quelle, cominciandosi da un sol punto, si passava alla produzione di cerchi dal minimo al massimo, così cominciandosi da un sol punto si verranno producendo infinite sfere, o vogliam dire una sfera, che in infinite grandezze si andrà ampliando. E questo in due maniere: cioè, o col por l' origine nel centro, ovvero nella circonferenza di tali sfere.

Salv. La contemplazione è veramente bellissima, e proporzionata all' ingegno del Sig. Sagr.

Simp. Io restando almeno capace della contemplazione sopra le due maniere del prodursi colli due diversi moti naturali i cerchi e le sfere, sebbene della produzione dipendente dal moto accelerato, e della sua dimostrazione non son del tutto intelligente, tuttavia quel potersi assegnare per luogo di tale emanazione tanto il centro infimo, quanto l'altissima sferica superficie, mi fa credere, che possa essere, che qualche gran mistero si contenga in queste vere ed ammirande conclusioni; mistero dico attenente alla creazione dell' universo, il quale si stima essere di forma sferica, ed alla residenza della prima causa.

Salv. Io non ho repugnanza al creder l' istesso, ma simili profonde contemplazioni si aspettano a più alte dottrine,

che le nostre. Ed a noi dee bastare d'esser quei men degni artefici, che dalle fodine scoprono e cavano i marmi, nei quali poi gli scultori industri fanno apparire maravigliose immagini, che sotto rozza ed informe scorza stavano ascose. Or se così vi piace, seguiremo avanti.

THEOR. VII. PROP. VII.

Si elevationes duorum planorum duplam habuerint rationem ejus, quam habeant eorundem planorum longitudines, lationes ex quiete in ipsis, temporibus aequalibus absolventur.

Si plana inæqualia, et inæqualiter inclinata A E, A B, (Fig. LIX.) quorum elevationes sint F A, D A, et quam rationem habet A E ad A B, eandem duplicatam habeat F A ad D A. Dico tempora lationum super planis A E, A B ex quiete in A esse æqualia. Ductæ sint parallelæ horizontales ad lineam elevationum E F, et B D, quæ secet A E in G. Et quia ratio F A ad A D dupla est rationis E A ad A B, et ut F A ad A D, ita E A ad A G; ergo ratio E A ad A G dupla est rationis E A ad A B; ergo A B media est inter E A, A G, et quia tempus descensus per A B ad tempus per A G est, ut A B ad A G, tempus autem descensus per A G ad tempus per A E est, ut A G ad mediam inter A G, A E, quæ est A B; ergo ex æquali tem-

pus per A B ad tempus per A E est, ut A B ad se ipsam: sunt igitur tempora æqualia; quod erat demonstrandum.

THEOR. VIII. PROP. VIII.

In planis ab eodem sectis circulo ad horizontem erecto, in iis, quæ cum termino diametri erecti conveniunt, sive imo, sive sublimi, lationum tempora sunt aequalia tempori casus in diametro: in illis vero, quae ad diametrum non pertingunt, tempora sunt breviora: in eis tandem, quae diametrum secant, sunt longiora.

Circuli ad horizontem erecti esto diameter perpendicularis A B. (Fig. LX.) De planis ex terminis A, B ad circumferentiam usque productis, quod tempora lationum super eis sint æqualia, jam demonstratum est. De plano D F ad diametrum non pertingente, quod tempus descensus in eo sit brevius, demonstratur ducto plano D B, quod et longius erit, et minus declive, quam D F; ergo tempus per D F brevius, quam per D B, hoc est per A B. De plano vero diametrum secante, ut C O; quod tempus descensus in eo sit longius, itidem constat; est enim et longius, et minus declive, quam G B; ergo patet propositum.

THEOR. IX. PROP. IX.

Si a puncto in linea horizonti parallela duo plana utcunque inclinentur, et a linea secentur, quae cum ipsis angulos faciat permutatim aequales angulis ab iisdem planis, et horizontali contentis, lationes in partibus a dicta linea sectis, temporibus aequalibus absolventur.

Ex puncto C (Fig. LXI.) horizontalis lineæ X, duo plana utcunque inflectantur C D, C B, et in quolibet puncto lineæ C D constituatur angulus C D F, angulo X C E æqualis: secet autem linea D F planum C E in F, adeo ut anguli C D F, C F D, angulis X C E, L C D permutatim sumptis sint æquales. Dico, tempora descensuum per C D, C F esse aequalia. Quod autem (posito angulo C D F æquali angulo X C E) angulus C F D sit æqualis angulo D C L, manifestum est. Dempto enim angulo communi D C F, ex tribus angulis trianguli C D F, æqualibus duobus rectis, quibus æquantur anguli omnes ad lineam L X in punto C constitutis, remanent in triangulo duo C D F, C F D, duobus X C E, L C D æquales: positus autem est C D F ipsi X C E equalis: ergo reliquus C F D reliquo D C L. Ponatur planum C E aequale plano C D, et ex punctis D, E per-

pendiculares agantur D A, E B ad horizontalem X L, ex C vero ad D F ducatur perpendicularis C G. Et quia angulus C D G angulo E C B est aequalis, et recti sunt D G C, C B E, erunt trianguli C D G, C B E æquianguli, et ut D C ad C G, ita C E ad E B: est autem D C æqualis C E; ergo C G æqualis erit B E. Cumque triangulorum D A C, C G F, anguli D C A, C A D angulis G F C, C G F sint æquales: erit, ut C D ad D A, ita F C ad C G, et permutando, ut D C ad C F, ita D A ad C G, seu B E. Ratio itaque elevationum planorum æqualium C D, C E est eadem cum ratione longitudinum D C, C E: ergo ex corollario primo præcedentis Propositionis sextæ tempora descensuum in ipsis erunt aequalia, quod erat probandum.

Aliter idem; ducta F S (Fig. LXII.) perpendiculari ad horizontalem A S. Quia triangulum C S F simile est triangulo D G C, erit, ut S F ad F C, ita G C ad C D. Et quia triangulum C F G simile est triangulo D C A, erit, ut F C ad C G, ita C D ad D A: ergo ex aequali, ut S F ad C G, ita C G ad D A. Media est igitur C G inter S F, D A, et ut D A ad S F, ita quadratum D A ad quadratum C G. Rursus cum triangulum A C D simile sit triangulo C G F, erit, ut D A ad D C, ita G C ad C F, et permutando ut D A ad C G, ita D C ad C F, et ut quadratum D A ad

quadratum C G, ita quadratum D C ad quadratum C F. Sed ostensum est, quadratum D A ad quadratum C G esse, ut linea D A ad lineam F S; ergo ut quadratum D C ad quadratum C F, ita linea D A ad F S; ergo ex præcedenti septima cum planorum C D, C F elevationes D A, F S, duplam habeant rationem eorundem planorum, tempora lationum per ipsa erunt æqualia.

THEOR. X PROP. X.

Tempora lationum super diversas planorum inclinationes, quarum elevationes sint aequales, sunt inter se, ut eorundem planorum longitudines, sive fiant lationes ex quiete, sive praecedat illis latio ex eadem altitudine.

Fiant lationes per A B C (Fig. LXIII.) et per A B D usque ad horizontem D C, adeo ut latio per A B praecedat lationibus per B D, et per B C. Dico, tempus lationis per B D ad tempus per B C esse, ut B D longitudo ad B C. Ducatur A F horizonti parallela, ad quam extendatur D B occurrens in F, et ipsarum D F, F B media sit F E, et ducta E O ipsi D C parallela, erit A O media inter C A, A B. Quod si intelligatur tempus per A B esse, ut A

B, erit tempus per F B, ut F B. Et tempus per totam A C erit ut media A O, per totam vero F D erit F E. Quare tempus per reliquam B C erit B O, per reliquam vero B D erit B E. Verum ut B E ad B O ita est B D ad B C; ergo tempora per B D, B C post casus per A B, F B, seu, quod idem est, per communem A B, erunt inter se, ut longitudines B D, B C; esse autem tempus per B D ad tempus per B C ex quiete in B, ut longitudo B D ad B C, supra demonstratum est. Sunt igitur tempora lationum per plana diversa, quorum aequales sint elevationes, inter se, ut eorundem planorum longitudines, sive motus fiat in ipsis ex quiete, sive lationibus iisdem praecedat alia latio ex eadem altitudine; quod erat ostendendum.

THEOR. XI. PROP. XI.

Si planum, in quo fit motus ex quiete, dividatur utcunque, tempus lationis per priorem partem ad tempus lationis per sequentem est, ut ipsamet prima pars ad excessum, quo eadem pars superatur a media proportionali inter totum planum, et primam eandem partem.

Fiat latio per totam A B (Fig. LXIV.) ex quiete in A, quae in C divisa sit ut-

cunque; totius autem B A, et prioris partis A C media sit proportionalis A F: erit C F excessus mediae F A super partem A C: Dico tempus lationis per A C ad tempus sequentis lationis per C B, esse ut A C ad C F. Quod patet: nam tempus per A C ad tempus per totam A B est, ut A C ad mediam A F; ergo dividendo, tempus per A C ad tempus per reliquam C B. erit, ut A C ad C F. Si itaque intelligatur tempus per A C esse ipsamet A C, tempus per C B erit C F: quod est propositum.

Quod si motus non fiat per continuatam A C B (Fig. LXV.) sed per inflexas A C D usque ad horizontem B D, cui ex F parallela ducta sit F E, demonstrabitur pariter tempus per A C ad tempus per reflexam C D esse ut A C ad C E. Nam tempus per A C ad tempus per C B est, ut A C ad C F, tempus vero per C B post A C ad tempus per C D post eundem descensum per A C demonstratum est esse, ut C B ad C D, hoc est ut C F ad C E; ergo ex aequali tempus per A C ad tempus per C D erit, ut A C linea ad C E.

THEOR. XII. PROP. XII.

Si perpendiculum, et planum utcunque inclinatum secentur inter easdem horizontales lineas, sumanturque media pro-

portionalia ipsorum, et partium suarum a communi sectione, et horizontali superiori comprehensarum; tempus lationis in perpendiculo ad tempus lationis factae in parte superiori perpendiculi, et consequenter in inferiori secantis plani, eam habebit rationem, quam habet tota perpendiculi longitudo ad lineam compositam ex media in perpendiculo sumpta, et ex excessu, quo totum planum inclinatum suam mediam superat.

Sint horizontes superior A F (Fig. LXVI.), inferior C D, inter quos secentur perpendiculum A C, et planum inclinatum D F in B, et totius perpendiculi C A, et superioris partis A B media sit A R, totius vero D F, et superioris partis B F media sit F S. Dico, tempus casus per totum perpendiculum A C ad tempus per suam superiorem partem A B cum inferiori plano, nempe cum B D, eam habere rationem, quam habet A C ad mediam perpendiculi, scilicet A R, cum S D, quae est excessus totius plani D F super suam mediam F S. Connectatur R S, quae erit horizontalibus parallela. Et quia tempus casus per totam A C, ad tempus per partem A B est, ut C A ad mediam A R, si intelligamus A C esse tempus casus per A C; erit A R tempus casus per A B, et R C per reliquam B C. Quod si tempus per

A C ponatur, uti factum est, ipsa A C, tempus per F D, erit F D, et pariter concludetur D S esse tempus per B D post F B, seu post A B. Tempus igitur per totam A C, est A R cum R C; per inflexas vero A B D, erit A R cum S D: quod erat probandum.

Idem accidit si loco perpendiculi ponatur aliud planum, quale, v. gr. N O; eademque est demonstratio.

PROBL. I. PROP. XIII.

Dato perpendiculo, ad ipsum planum inflectere, in quo, cum ipsum habeat cum dato perpendiculo eandem elevationem, fiat motus post casum in perpendiculo eodem tempore, ac in eodem perpendiculo ex quiete.

Sit datum perpendiculum A B (Fig. LXVII.), cui extenso in C ponatur pars B C aequalis, et ducantur horizontales C E, A G. Oportet ex B planum usque ad horizontem C E inflectere, in quo fiat motus post casum ex A eodem tempore, ac in A B ex quiete in A. Ponatur C D aequalis C B, et ducta B D applicetur B E aequalis utrisque B D, D C. Dico, B E esse planum quaesitum. Producatur E B occurrens horizonti A G in G, et ipsa-

rum E G, G B, media sit G F. Erit E F ad F B, ut E G ad G F, et quadratum E F ad quadratum F B, ut quadratum E G ad quadratum G F, hoc est, ut linea E G ad G B; est autem E G dupla G B; ergo quadratum E F duplum quadrati F B: verum quadratum quoque D B duplum est quadrati B C; ergo ut linea E F ad F B, ita D B ad B C, et componendo, et permutando, ut E B ad duas D B, B C, ita B F ad B C; sed B E duabus D B, B C est aequalis; ergo B F ipsi B C, seu B A aequalis est. Si igitur intelligatur A B esse tempus casus per A B, erit G B tempus per G B, et G F tempus per totam G E; ergo B F erit tempus per reliquam B E, post casum ex G, seu ex A. Quod erat propositum.

PROBL. II. PROP. XIV.

Dato perpendiculo, et plano ad eum inclinato, partem in perpendiculo superiori reperire, quae ex quiete conficiatur tempore aequali ei, quo conficitur planum inclinatum post casum in parte reperta in perpendiculo.

Sit perpendiculum D B (Fig. LXVIII.) et planum ad ipsum inclinatum A C. Oportet in perpendiculo A D partem reperire, quae ex quiete conficiatur tempore

aequali ei, quo post casum in ea conficitur planum A C. Ducatur horizontalis C B, et ut B A cum dupla A C ad A C, ita fiat C A ad A E, et ut B A ad A C, ita fiat E A ad A R, et ab R ducatur perpendicularis R X ad D B; dico X esse punctum quæsitum. Et quia ut B A cum dupla A C ad A C, ita C A ad A E, dividendo erit, ut B A cum A C ad A C, ita C E ad E A, et quia ut B A ad A C, ita E A ad A R, erit componendo, ut B A cum A C ad A C, ita E R ad R A. Sed ut B A cum A C, ad A C, ita est C E ad E A; ergo ut C E ed E A, ita E R ad R A, et ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe C R ad R E. Sunt itaque C R, R E, R A proportionales. Amplius, quia ut B A ad A C, ita posita est E A ad A R, et propter similitudinem triangulorum ut B A ad A C, ita X A ad A R; ergo ut E A ad A R, ita X A ad A R: sunt itaque E A, X A aequales. Modo si intelligamus tempus per R A esse ut R A, tempus per R C erit R E, media inter C R, R A; et A E erit tempus per A C post R A, sive post X A; verum tempus per X A est X A, dum R A est tempus per R A. Ostensum autem est X A, A E esse aequales: ergo patet propositum.

PROBL. III. PROP. XV.

Dato perpendiculo, et plano ad ipsum inflexo, partem in perpendiculo infra extenso reperire, quae tempore eodem conficiatur; ac planum inflexum post casum ex dato perpendiculo.

Sit perpendiculum A B (Fig. LXIX.) et planum ad ipsum inflexum B C. Oportet in perpendiculo infra extenso partem reperire, quae ex casu ab A conficiatur tempore eodem, atque B C ex eodem casu ab A. Ducatur horizontalis A D, cui occurrat C B extensa in D, et ipsarum C D, D B media sit D E, et B F ponatur aequalis B E, deinde ipsarum B A, A F, tertia proportionalis sit A G. Dico B G esse spatium, quod post casum A B conficitur tempore eodem, ac planum B C post eundem casum. Si enim ponamus tempus per A B esse ut A B, erit tempus per D B ut D B, et quia D E est media inter B D, D C, erit eadem D E tempus per totam D C, et B E tempus per reliquam B C ex quiete in D, seu ex casu A B; et similiter concludetur, B F esse tempus per B G, post casum eundem: est autem B F aequalis B E: ergo patet propositum.

THEOR. XIII. PROP. XVI.

Si plani inclinati, et perpendiculi partes, quorum tempora lationum ex quiete sint aequalia, ad idem punctum componantur, mobile veniens ex qualibet altitudine sublimiori citius absolvet eandem partem plani inclinati, quam ipsam partem perpendiculi.

Sit perpendiculum E B, (Fig. LXX.) et planum inclinatum C E ad idem punctum E composita, quorum tempora lationum ex quiete in E sint aequalia, et in perpendiculo extenso sumptum sit quodlibet punctum sublime A, ex quo demittantur mobilia. Dico, tempore breviori absolvi planum inclinatum E C, quam perpendiculum E B post casum A E. Jungatur C B, et ducta horizontali A D extendatur C E illi occurrens in D, et C D, D E media proportionalis sit D F, ipsarum vero B A, A E, media sit A G, et ducantur F G, D G. Et quia tempora lationum per E C, E B ex quiete in E sunt aequalia, erit angulus C rectus, ex Corollario secundo Propositionis sextae: estque rectus A, et anguli ad verticem E aequales: triangula igitur A E D, C E B sunt aequiangula, et latera circa aequales angulos proportionalia; ergo ut B E ad E C, ita D E ad E A. Rectan-

gulum ergo B E A est aequale rectangulo C E D: et quia rectangulum C D E, superat rectangulum C E D, quadrato E D, rectangulum vero B A E, superat rectangulum B E A quadrato E A; excessus rectanguli C D E super rectangulo B A E, hoc est quadrati F D super quadrato A G, erit idem cum excessu quadrati D E super quadrato A E, qui excessus est quadratum D A: est igitur quadratum F D, aequale duobus quadratis G A, A D, quibus est quoque aequale quadratum G D; ergo linea D F ipsi D G est aequalis, et angulus D G F, aequalis angulo D F G, et angulus E G F minor angulo E F G, et latus oppositum E F minus latere E G. Modo si intelligamus tempus casus per A E esse, ut A E, erit tempus per D E, ut D E; cumque A G media sit inter B A, A E, erit A G tempus per totam A B, et reliqua E G, erit tempus per reliquam E B ex quiete in A, et similiter concludetur E F, esse tempus per E C post descensum D E, seu post casum A E, demonstratum autem est E F minorem esse, quam E G: ergo patet propositum.

COROLLARIUM.

Ex hac, atque ex praecedenti constat spatium, quod conficitur in perpendiculo, post casum ex sublimi, tempore eodem, quo conficitur planum inclinatum, minus esse eo, quod conficitur tempore eodem atque in inclinato non praecedente casu ex sublimi, majus tamen quam idem planum inclinatum: cum enim modo demonstratum sit, quod mobilium venientium ex termino sublimi A tempus conversi per E C (Fig. LXXI.) brevius sit tempore procedentis per E B constat spatium, quod conficitur per E B tempore aequali tempori per E C, minus esse toto spatio E B. Quod autem idem spatium perpendiculi majus sit, quam E C, manifestum fit sumpta figura praecedentis Propositionis, in qua partem perpendiculi B G confici demonstratum est tempore eodem cum B C post casum A B: hanc autem B G majorem esse quam B C, sic colligitur. Cum B E, F B aequales sint, B A vero minor B D, majorem rationem habet F B ad B A, quam E B ad B D, et componendo F A ad A B majorem habet, quam E D ad D B; est autem ut F A ad A B, ita G F ad F B, (est enim A F media inter B A, A G,) et similiter ut E D ad B D, ita est

C E ad E B; ergo G B ad B F majorem habet rationem, quam C B ad B E; est igitur G B major B C.

PROBL. IV. PROP. XVII.

Dato perpendiculo, et plano ad ipsum inflexo, in dato plano partem signare, in qua post casum in perpendiculo fiat motus tempore aequali ei, quo mobile datum perpendiculum ex quiete confecit.

Sit perpendiculum A B, (Fig. LXXII.) et ad ipsum planum inflexum B E: oportet in B E spatium signare, per quod mobile post casum in A B moveatur tempore aequali ei, quo ipsum perpendiculum A B ex quiete confecit.

Sit horizontalis linea A D, cui occurrat in D planum extensum, et accipiatur F B aequalis B A, et fiat ut B D ad D F, ita F D ad D E. Dico, tempus per B E post casum in A B aequari tempori per A B ex quiete in A. Si enim intelligatur A B esse tempus per A B, erit D B tempus per D B. Cumque sit, ut B D ad D F, ita F D ad D E, erit D F tempus per totum planum D E, et B F per partem B E ex D, sed tempus per B E post D B, est idem ac post A B; ergo tempus per B E post

A B, erit B F, aequale scilicet tempori A B, ex quiete in A: quod erat propositum.

PROBL. V. PROP. XVIII.

Dato in perpendiculo quovis spatio a principio lationis signato, quod in dato tempore conficiatur, datoque quocunque alio tempore minori, aliud spatium in perpendiculo eodem reperire, quod in dato tempore minori conficiatur.

Sit perpendiculum A, (Fig. LXXIII.) in quo detur spatium A B, cujus tempus ex principio A sit A B, sitque horizon C B E, et detur tempus ipso A B minus, cui in horizonte notetur aequale B C: oportet in eodem perpendiculo spatium eidem A B aequale reperire, quod tempore B C conficiatur. Jungatur linea A C. Cumque B C minor sit B A, erit angulus B A C minor angulo B C A. Constituatur ei aequalis C A E, et linea A E horizonti occurrat in puncto E, ad quam perpendicularis ponatur E D secans perpendiculum in D, et linea D F ipsi B A secetur aequalis. Dico ipsam F D esse perpendiculi partem, in qua latio ex principio motus in A absolvitur tempore B C dato. Cum enim in triangulo rectangulo A E D ab

angulo recto E perpendicularis ad latus oppositum A D ducta sit E B, erit A E media inter D A, A B, et B E media inter D B, B A, seu inter F A, A B, (est enim F A ipsi D B aequalis.) Cumque A B positum sit esse tempus per A erit A E seu E C tempus per totam A D, et E B tempus per A F, ergo reliqua B C erit tempus per reliquam F D: quod erat intentum.

PROBL. VI. PROP. XIX.

Dato in perpendiculo spatio quocunque à principio lationis peracto, datoque tempore casus: tempus reperire, quo aliud aequale spatium ubicunque in eodem perpendiculo acceptum, ab eodem mobili consequenter conficiatur.

Sit in perpendiculo A B, (Fig. LXXVI.) quodcunque spatium A C ex principio lationis in A acceptum, cui aequale sit aliud spatium D B ubicunque acceptum, sitque datum tempus lationis per A C, sitque illud A C. Oportet reperire tempus lationis per D B post casum ex A. Circa totam A B semicirculus describatur A E B, et ex C ad A B perpendicularis sit C E; et jungatur A E, quae major erit quam E C. Secetur E F ipsi E C aequalis; dico reli-

quum F A esse tempus lationis per D B. Quia enim A E est media inter B A, A C; estque A C tempus casus per A C; erit A E tempus per totam A B. Cumque C E media sit inter D A, A C, (est enim D A aequalis ipsi B C,) erit C E, hoc est, E F, tempus per A D; ergo reliqua A F est tempus per reliquam D B, quod est propositum.

COROLLARIUM.

Hinc colligitur, quod si alicujus spatii ponatur tempus ex quiete esse, ut ipsummet spatium; tempus illius post aliud spatium adjunctum erit excessus medii inter adjunctum una cum spatio, et ipsum spatium super medium inter primum, et adjunctum. Veluti posito, quod tempus per A B (Fig. LXXV.) ex quiete in A sit A B, addito A S, tempus per A B post S A erit excessus medii inter S B, B A, super medium inter B A, A S.

PROBL. VII. PROP. XX.

Dato quolibet spatio, et parte in eo post principium lationis, partem alteram versus finem reperire, quae conficiatur tempore eodem ac prima data.

Sit spatium C B, (Fig. LXXVI.) et in eo pars C D data post principium lationis in C. Oportet partem alteram versus finem B reperire, quae conficiatur tempore eodem ac data C D. Sumatur media iter B C, C D, cui aequalis ponatur B A; et ipsarum B C, C A, tertia proportionalis sit C E. Dico, E B esse spatium, quod post casum ex C conficitur tempore eodem ac ipsum C D. Si enim intelligamus, tempus per totam C B esse ut C B; erit B A (media scilicet inter B C, D) tempus per C D. Cumque C A media sit inter B C, C E, erit C A tempus per C E; est autem tota B C tempus per totam C B; ergo reliqua B A erit tempus per reliquam E B post casum ex C; eadem vero B A fuit tempus per C D; ergo temporibus aequalibus conficiuntur C D, et E B ex quiete in A; quod erat faciendum.

THEOR. IV. PROP. XXI.

Si in perpendiculo fiat casus ex quiete, in quo a principio lationis sumatur pars quovis tempore peracta, post quam sequatur motus inflexus per aliquod planum utcunque inclinatum, spatium, quod in tali plano conficitur in tempore aequali tempori casus jam peracti in perpendiculo,

ad spatium jam peractum in perpendiculo majus erit quam duplum, minus vero quam triplum.

Infra horizontem A E (Fig. LXXVII.) sit perpendiculum A B, in quo ex principio A fiat casus, cujus sumatur quaelibet pars A C; inde ex C inclinetur utcunque planum C G; super quo post casus in A C continuetur motus. Dico, quod spatium tali motu peractum per C G in tempore aequali tempori casus per A C, est plus quam duplum, minus vero quam triplum ejusdem spatii A C. Ponatur enim C F aequalis A C, et extenso plano G C usque ad horizontem in E, fiat, ut C E ad E F, ita F E ad E G. Si itaque ponatur tempus casus per A C esse, ut linea A C, erit C E tempus per E C et C F, seu C A, tempus motus per C G. Ostendendum itaque est, spatium C G ipso C A majus esse quam duplum, minus vero quam triplum. Cum enim sit, ut C E ad E F, ita F E ad E G, erit etiam ita C F ad F G. Minor autem est E C quam E F; quare et C F minor erit quam F G, et G C major quam dupla F C, seu A C. Cumque rursus F E minor sit, quam dupla ad E C, (est enim E C major C A, seu C F), erit quoque G F minor quam dupla ad F C, et G C minor quam tripla ad C F seu C A. Quod erat demonstrandum.

Poterat autem universalius idem proponi; quod enim accidit in perpendiculari, et plano inclinato, contingit etiam, si post motum in plano quodam inclinato inflectatur per magis inclinatum; ut videtur in altera figura: eademque est demonstratio.

PROBL. VIII. PROP. XXII.

Datis duobus temporibus inaequalibus, et spatio, quod in perpendiculo ex quiete conficitur tempore breviori ex datis: a puncto supremo perpendiculi usque ad horizontem planum inflectere, super quo mobile descendat tempore aequali longiori ex datis.

Tempora inaequalia sint, A (Fig. LXXVIII.) majus, B vero minus; spatium autem, quod in perpendiculo conficitur ex quiete in tempore B, sit C D. Oportet ex termino C planum usque ad horizontem inflectere, quod tempore A conficiatur. Fiat ut B ad A, ita C D ad aliam lineam, cui linea C X aequalis ex C ad horizontem descendat: manifestum est, planum C X esse illud, super quo mobile descendit tempore dato A. Demonstratum enim est, tempus per planum inclinatum ad tempus in sua elevatione eam habere rationem, quam habet plani longitudo ad longitudinem ele-

vationis suae. Tempus igitur per C X ad tempus per C D est, ut C X ad C D, hoc est ut tempus A ad tempus B; tempus vero B est illud, quo conficitur perpendiculum C D ex quiete; ergo tempus A est illud, quo conficitur planum C X.

PROBL. IX. PROP. XXIII.

Dato spatio quovis tempore peracto ex quiete in perpendiculo, ex termino imo hujus spatii planum inflectere, super quo post casum in perpendiculo tempore eodem conficiatur spatium cuilibet spatio dato aequale; quod tamen majus sit quam duplum, minus vero quam triplum spatii peracti in perpendiculo.

Sit in perpendiculo A S (Fig. LXXIX.) tempore A C peractum spatium A C ex quiete in A: cujus I R majus sit quam duplum, minus vero quam triplum. Oportet ex termino C planum inflectere, super quo mobile eodem tempore A C conficiat post casum per A C spatium ipsi I R aequale. Sint R N, N M, ipsi A C aequalia, et quam rationem habet residuum I M ad M N. eandem habeat A C linea ad aliam, cui aequalis applicetur C E ex C ad horizontem A E, quae extendatur versus O et

accipiantur C F, F G, G O aequales ipsis R N, N M, M I. Dico, tempus super inflexa C O, post casum A C, esse aequale tempori A C ex quiete in A. Cum enim sit, ut O G ad G F, ita F C ad C E; erit componendo ut O F ad F G, seu F C, ita F E ad E C, et ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia ad omnia: nempe tota O E ad E F, ut F E ad E C. Sunt itaque O E, E F, E C, continue proportionales, quod cum positum sit, tempus per A C esse ut A C, erit C E tempus per E C; et E F tempus per totam E O, et reliquum C F per reliquam C O; est autem C F aequalis ipsi C A; ergo factum est quod fieri oportebat; est enim tempus C A tempus casus per A C ex quiete in A, C F vero (quod aequatur C A) est tempus per C O, post descensum per E C, seu post casum per A C; quod est propositum. Notandum autem est, quod idem accidet, si praecedens latio non in perpendiculo fiat, sed in plano inclinato, ut in sequenti figura, in qua latio praecedens facta sit per planum inclinatum A S infra horizontem A E; et demonstratio est prorsus eadem.

SCHOLIUM.

Si diligenter attendatur, manifestum erit, quod quo minus data linea I R deficit a tripla ipsius A C, (Fig. LXXX.) eo planum inflexum, super quod facienda est secunda latio, puta C O, accedit vicinius ad perpendiculum, in quo tandem in tempore aequali A C conficitur spatium ad A C triplum. Cum enim I R proxima fuerit ad triplicitatem A C, erit I M aequalis fere ipsi M N. Cumque, ut I M ad M N in constructione, ita fiat A C ad C E, constat, ipsam C E paulo majorem reperiri quam C A, et quod consequens est, punctum E proximum reperiri puncto A, et C O cum C S acutissimum angulum continere, et fere mutuo coincidere. E contra vero, si data I R minimum quid major fuerit quam dupla ejusdem A C, erit I M brevissima linea: ex quo accidet, minimam quoque futuram esse A C respectu C E, quae longissima erit, et quam proxime accedet ad parallelam horizontalem per C productam. Indeque colligere possumus, quod, si in apposita figura post descensum per planum inclinatum A C fiat reflexio per lineam horizontalem, qualis esset C T, spatium, tempore aequali tempori descensus per A C, per quod mo-

bile consequenter moveretur, esset duplum spatii A C exacte. Videtur autem et hic accommodari consimilis ratiocinatio. Apparet enim ex eo, cum O E ad E F sit ut F E ad E C, ipsam F C determinare tempus per C O. Quod si pars horizontalis T C, dupla C A, divisa sit bifariam in V, extensa versus X in infinitum elongata erit, dum occursum cum producta A E quaerit, et ratio infinitae T X ad infinitam V X non erit alia a ratione infinitae V X ad infinitam X C.

Istud idem alia aggressione concludere poterimus, consimile resumentes ratiocinium ei, quo usi sumus in propositionis primae demonstratione. Resumentes enim triangulum A B C (Fig. LXXXI,), nobis repraesentans in suis parallelis basi B C velocitatis gradus continue adauctos juxta temporis incrementa; ex quibus, cum infinitae sint, veluti infinita sunt puncta in linea A C, et instantia in quovis tempore, exurget superficies ipsa trianguli. Si intelligamus, motum per alterum tantum temporis continuari, sed non amplius motu accelerato, verum aequabili, juxta maximum gradum velocitatis acquisitae, qui gradus repraesentatur per lineam B C; ex talibus gradibus conflabitur aggregatum consimile parallelogrammo A D B C, quod duplum est trianguli A B C. Quare spatium, quod cum gradibus consimilibus tempore eodem conficietur, duplum erit

spatii peracti cum gradibus velocitatis a triangulo A B C repraesentatis. At in plano horizontali motus est aequabilis, cum nulla ibi sit causa accelerationis, aut retardationis; ergo concluditur, spatium C D, peractum tempore aequali tempori A C, duplum esse spatii A C; hoc enim motu ex quiete accelerato juxta parallelas trianguli conficitur; illud vero juxta parallelas parallelogrammi, quae, dum fuerint infinitae, duplae sunt ad parallelas infinitas trianguli.

Attendere insuper licet, quod velocitatis gradus, quicunque in mobili reperiatur, est in illo suapte natura indelebiliter impressus, dum externae causae accelerationis, aut retardationis tollantur, quod in solo horizontali plano contingit: nam in planis declivibus adest jam causa accelerationis majoris, in acclivibus vero retardationis. Ex quo pariter sequitur, motum in horizontali esse quoque aeternum: si enim est aequabilis, non debilitatur, aut remittitur, et multo minus tollitur. Amplius, existente gradu celeritatis per naturalem descensum a mobili acquisito suapte natura indelebili, atque aeterno, considerandum occurrit, quod si post descensum per planum declive fiat reflexio per aliud planum acclive, jam in isto occurrit causa retardationis: in tali enim plano idem mobile naturaliter descendit; quare mixtio quaedam contrariarum affectionum

exurgit, nempe gradus illius celeritatis acquisitae in praecedenti descensu, qui per se uniformiter mobile in infinitum adduceret, et naturalis propensionis ad motum deorsum juxta illam eandem proportionem accelerationis, juxta quam semper movetur. Quare admodum rationabile videbitur, si inquirentes, quaenam contingant accidentia, dum mobile post descensum per aliquod planum inclinatum reflectatur per planum aliquod acclive, accipiamus gradum illum maximum in descensu acquisitum, idem per se perpetuo in ascendente plano servari; attamen in ascensu ei supervenire naturalem inclinationem deorsum, motum nempe ex quiete acceleratum juxta semper acceptam proportionem. Quod si forte haec intelligere fuerit subobscurum, clarius per aliquam delineationem explicabitur.

Intelligatur itaque, factum esse descensum per planum declive A B (Fig. LXXXII.), ex quo per aliud acclive B C continuetur motus reflexus, et sint primo plana aequalia, et ad aequales angulos super horizontem G H elevata. Constat jam, quod mobile ex quiete in A descendens per A B, gradus acquirit velocitatis juxta temporis ipsius incrementum: gradum vero in B esse maximum acquisitorum, et suapte natura immutabiliter impressum, sublatis scilicet causis accelerationis novae, aut retardationis: accelerationis, inquam,

si adhuc super extenso plano ulterius progrederetur: retardationis vero, dum super planum acclive B C fit reflexio: in horizontali autem G H aequabilis motus juxta gradum velocitatis ex A in B aequisitae in infinitum extenderetur. Esset autem talis velocitas, ut in tempore aequali tempori descensus per A B in horizonte conficeret spatium duplum ipsius A B. Modo fingamus, idem mobile eodem celeritatis gradu aequabiliter moveri per planum B C, adeo ut etiam in hoc tempore aequali tempori descensus per A B conficeret super B C extenso spatium duplum ipsius A B. Verum intelligamus statim atque ascendere incipit, ei suapte natura supervenire illud idem, quod ei contigit ex A super planum A B, nempe descensus quidam ex quiete secundum gradus eosdem accelerationis, vi quorum, ut in A B contigit, tempore eodem tantundem descendat in plano reflexo, quantum descendit per A B, manifestum est, quod ex ejusmodi mixtione motus aequabilis ascendentis, et accelerati descendentis perducetur mobile ad terminum C per planum B C, juxta eosdem velocitatis gradus, qui erunt aequales. Quod vero sumptis utcunque duobus punctis D, E, aequaliter ab angulo B remotis, transitus per D B fiat tempore aequali tempori reflexionis per B E, hinc colligere possumus Ducta D F erit parallela ad B C; constat enim, descensum per

AD reflecti per DF, quod si post D mobile feratur per horizontalem DE, impetus in E erit idem cum impetu in D; ergo ex E ascendet in C, ergo gradus velocitatis in D est aequalis gradui in E. Ex his igitur rationabiliter asserere possumus, quod, si per aliquod planum inclinatum fiat descensus, post quem sequatur reflexio per planum elevatum, mobile per impetum conceptum ascendet usque ad eandem altitudinem, seu elevationem ab horizonte. Ut si fiat descensus per A B, feretur mobile per planum reflexum B C usque ad horizontalem A C; non tantum si inclinationes planorum sint aequales, verum etiam si inaequales sint, qualis est plani B D; assumptum enim prius est, gradus velocitatis esse aequales, qui super planis inaequaliter inclinatis acquiruntur, dum ipsorum planorum eadem fuerit supra horizontem elevatio. Si autem existente eadem inclinatione planorum E B, B D (Fig. LXXXIII.), descensus per E B impellere valet mobile per planum B D usque ad D, cum talis impulsus fiat propter conceptum velocitatis impetum in puncto B; sitque idem impetus in B, seu descendat mobile per A B, seu per E B; constat, quod expelletur pariter mobile per B D, post descensum per A B, atque per E B. Accidet vero, quod tempus ascensus per B D longius erit, quàm per B C, prout descensus quoque per E B longiori fit tem-

pore, quam per A B: ratio autem eorundem temporum jam demonstrata est eadem, ac longitudinum ipsorum planorum. Sequitur modo, ut inquiramus proportionem spatiorum temporibus aequalibus peractorum in planis, quorum diversae sint inclinationes, eaedem tamen elevationes: hoc est, quae inter easdem parallelas horizontales comprehendantur. Id autem contingit juxta sequentem rationem.

THEOR. XV. PROP. XXIV.

Dato inter easdem parallelas horizontales perpendiculo, et plano elevato ab ejus imo termino, spatium, quod a mobili post casum in perpendiculo, super plano elevato conficitur in tempore aequali tempori casus, majus est ipso perpendiculo, minus tamen quam duplum ejusdem perpendiculi.

Inter easdem parallelas horizontales B C, H G (LXXXIV.), sint perpendiculum A E, et planum elevatum E B, super quo post casum in perpendiculo A E ex termino E, fiat reflexio versus B. Dico, spatium, per quod mobile ascendit in tempore aequali tempori descensus A E, majus esse quam A E, minus vero quam duplum ejusdem A E. Ponatur E D, ipsi A E aequale, et ut E B ad B D, ita fiat D B ad B F.

Ostendetur primo, punctum F esse signum, quo mobile motu reflexo per E B perveniet tempore aequali tempori A E: deinde, E F majus esse quam E A; minus vero quam duplum ejusdem. Si intelligamus, tempus descensus per A E esse, ut A E, erit tempus descensus per B E, seu ascensus per E B, ut ipsa linea B E: cumque D B media sit inter E B, B F, sitque B E tempus descensus per totam B E, erit B D tempus descensus per B F, et reliqua D E tempus descensus per reliquam F E. Verum idem est tempus per F E ex quiete in B, atque tempus ascensus per E F, dum in E fuerit velocitatis gradus per descensum B E seu A E acquisitus: ergo idem tempus D E erit id, in quo mobile post casum ex A per A E, motu reflexo per E B, pervenit ad signum F. Positum autem est, E D esse aequale ipsi A E, quod erat primo ostendendum. Et quia, ut tota E B ad totam B D, ita ablata D B ad ablatam B F, erit, ut tota E B ad totam B D, ita reliqua E D ad D F. Est autem E B major B D: ergo et E D major D F, et E F minor quam dupla D E, seu A E; quod erat ostendendum. Idem autem accidet, si motus praecedens non in perpendiculo, sed in plano inclinato fiat; eademque est demonstratio, dummodo planum reflexum sit minus acclive, nempe longius plano declivi.

THEOR. XVI. PROP. XXV.

Si post casum per aliquod planum inclinatum sequatur motus per planum horizontis, erit tempus casus per planum inclinatum ad tempus motus per quamlibet lineam horizontis, ut dupla longitudo plani inclinati ad lineam acceptam horizontis.

Sit linea horizontis C B (Fig. LXXXV.) planum inclinatum A B, et post casum per A B sequatur motus per horizontem, in quo sumatur quodlibet spatium B D. Dico, tempus casus per A B ad tempus motus per B D esse, ut dupla A B ad B D. Sumpta enim B C ipsius A B dupla, constat ex praedemonstratis, tempus casus per A B aequari tempori motus per B C: sed tempus motus per B C ad tempus motus per D B est, ut linea C B ad lineam B D: ergo tempus motus per A B, ad tempus per B D, est ut dupla A B ad B D; quod erat probandum.

PROBL. X. PROP. XXVI.

Dato perpendiculo inter lineas parallelas horizontales, datoque spatio majori eodem perpendiculo, sed minori quam duplo ejusdem, ex imo termino perpendiculi planum attollere inter easdem parallelas, super quo motu reflexo post descen-

sum in perpendiculo conficiat mobile spatium dato aequale, et in tempore aequali tempori descensus in perpendiculo.

Inter parallelas horizontales A O, B C (Fig. LXXXVI.), sit perpendiculum A B; F E vero major sit, quam B A, minor vero quam dupla ejusdem. Oportet ex B planum inter horizontales erigere, super quo mobile post casum ex A in B, motu reflexo, in tempore aequali tempori descensus per A B conficiat ascendendo spatium aequale ipsi E F. Ponatur E D aequalis A B, erit reliqua D F minor, cum tota E F minor sit quam dupla ad A B: sit D I aequalis D F, et ut E I ad I D, ita fiat D F ad aliam F X, atque ex B reflectatur recta B O aequalis E X. Dico planum per B O esse illud, super quo post casum A B mobile in tempore aequali tempori casus per A B pertransit ascendendo spatium aequale dato spatio E F. Ipsis E D, D F aequales ponantur B R, R S: cum enim sit, ut E I ad I D, ita D F ad F X: erit componendo, ut E D ad D I, ita D X ad X F; hoc est, ut E D ad D F, ita D X ad X F, et E X ad X D; hoc est, ut B O ad O R, ita R O ad O S. Quod si ponamus, tempus per A B esse A B, erit tempus per O B ipsa O B; et R O tempus per O S; et reliqua B R tempus per reliquum S B, descendendo ex O in B. Sed tempus descensus per S B ex

quiete in O est aequale tempori ascensus ex B in S post descensum A B: ergo B O est planum ex B elevatum, super quo post descensum per A B conficitur tempore B R seu B A spatium B S aequale spatio dato E F. Quod facere oportebat.

THEOR. XVII. PROP. XXVII.

Si in planis inaequalibus, quorum eadem sit elevatio, descendat mobile, spatium, quod in ima parte longioris conficitur in tempore aequali ei, in quo conficitur totum planum brevius, est aequale spatio, quod componitur ex ipso breviori plano, et ex parte, ad quam idem brevius planum eam habet rationem, quam habet planum longius ad excessum, quo longius brevius superat.

Sit planum A C (Fig. LXXXVII.) longius, A B vero brevius, quorum eadem sit elevatio A D; et ex ima parte A C sumatur C E aequale ipsi A B; et quam rationem habet totum C A ad A E, (nempe ad excessum plani C A super A B) hanc habeat C E ad E F. Dico, spatium F C esse illud, quod conficitur post discessum ex A tempore aequali tempori descensus per A B. Cum enim totum C A ad totum A E sit, ut ablatum C E ad ablatum E F; erit reliquum E A ad reliquum A F, ut totum C A ad totum A E. Sunt

itaque tres C A, A E, A F, continue proportionales. Quod si ponatur, tempus per A B esse ut A B; erit tempus per A C ut A C, tempus vero per A F, erit ut A E, et per reliquum F C, erit ut E C; est autem E C ipsi A B aequale: ergo fit propositum.

THEOR. XVIII. PROP. XXVIII.

Tangat horizontalis linea AG(Fig. LXXXVIII.) circulum, et a contactu sit diameter A B, et duae chordae utcunque A E B. Determinanda sit ratio temporis casus per A B ad tempus descensus per ambas A E B. Extendatur B E usque ad tangentem in G, et angulus B A E bifariam secetur, ducta A F. Dico, tempus per A B ad tempus per A E B esse, ut A E ad A E F. Cum enim angulus F A B aequalis sit angulo F A E; angulus vero E A G angulo A B F; erit totus G A F duobus F A B, A B F aequalis; quibus aequatur quoque angulus G F A; ergo linea G F ipsi G A est aequalis. Et quia rectangulum B G E aequatur quadrato G A; erit quoque æquale quadrato G F, et tres lineae B G, G F, G E, proportionales. Quod si ponatur, A E esse tempus per A E, erit G E tempus per G E; et G F tempus per totam G B, et E F tempus per E B, post descensum ex G, seu ex A per A E. Tempus igitur per A E, seu per A B ad tempus per A

E B est, ut A E ad A E F; quod erat determinandum.

Aliter brevius. Secetur G F aequalis G A; constat, G F esse mediam proportionalem inter B G, G E. Reliqua ut supra.

PROBL. XI. PROP. XXIX.

Dato quolibet spatio horizontali, ex cujus termino erectum sit perpendiculum, in quo sumatur pars aequalis dimidio spatii in horizontali dato, mobile ex tali altitudine descendens, et in horizontali conversum, conficiet horizontale spatium una cum perpendiculo breviori tempore, quam quodcunque aliud spatium perpendiculi cum eodem spatio horizontali.

Sit planum horizontale, in quo datum sit quodlibet spatium B C (Fig. LXXXIX.) et ex termino B sit perpendiculum, in quo B A sit dimidium ipsius B C. Dico, tempus, quo mobile ex A demissum conficiet ambo spatia A B, B C, esse temporum omnium brevissimum, quibus idem spatium B C cum parte perpendiculi, sive majori, sive minori parte A B, conficeretur. Sit sumpta major, ut in prima figura, vel minor, ut in secunda, E B. Ostendendum est, tempus, quo conficiuntur spatia B E, B C, longius esse tempore, quo conficiuntur A B, B C. Intelligatur,

tempus per A B esse ut A B; erit quoque tempus motus in horizontali B C, cum B C dupla sit ad A B et per ambo spatia A B C, tempus erit dupla B A. Sit B O media inter E B, B A. Erit B O tempus casus per E B. Sit præterea horizontale spatium B D duplum ipsius B E; constat, tempus ipsius post casum E B esse idem B O. Fiat, ut D B ad B C, seu ut E B ad B A, ita O B ad B N, et cum motus in horizontali sit aequabilis, sitque O B tempus per B D post casum ex E, erit N B tempus per B C post casum ex eadem altitudine E. Ex quo constat, O B cum A N esse tempus per E B C; cumque dupla B A sit tempus per A B C; ostendendum relinquitur, O B cum B N majora esse quam dupla B A; cum autem O B media sit inter E B, B A; ratio E B ad B A dupla est rationis O B ad B A; et cum E B ad B A sit, ut O B ad B N, erit quoque ratio O B ad B N dupla rationis O B ad B A; verum ipsa ratio O B ad B N componitur ex rationibus O B ad B A, et A B ad B N: ergo ratio A B ad B N est eadem cum ratione O B ad B A. Sunt igitur B O, B A, B N tres continue proportionales, et O B cum B N majores quam dupla B A. Ex quo patet propositum.

THEOR. XIX. PROP. XXX.

Si ex aliquo puncto lineae horizontalis descendat perpendiculum, ex alio vero puncto in eadem horizontali sumpto ducendum sit planum usque ad perpendiculum, per quod mobile tempore brevissimo usque ad perpendiculum descendat: tale planum erit illud, quod de perpendiculo abscindit partem aequalem distantiae puncti accepti in horizontali a termino perpendiculi.

Sit perpendiculum B D (Fig. xc.) ex puncto B horizontalis lineae A C descendens, in qua sit quodlibet punctum C, et in perpendiculo ponatur distantia B E aequalis distantiae B C, et ducatur C E. Dico, planorum omnium ex puncto C usque ad perpendiculum inclinatorum C E esse illud, super quo tempore omnium brevissimo fit descensus usque ad perpendiculum. Inclinentur enim supra, et infra plana C F, C G, et ducatur I K circulum semidiametro B C descriptum tangens in C, quae erit perpendiculo aequidistans, et ipsi C F parallela sit E K, usque ad tangentem protracta, secans circumferentiam circuli in L; constat tempus casus per L E esse aequale tempori casus per C E, sed tempus per K E est longius, quam per L E; ergo tempus per K E longius est, quam per C E; sed tempus per K E aequa-

tur tempori per C F, cum sint aequales, et secundum eandem inclinationem ductae: similiter cum C G, et I E sint aequales, et juxta eandem inclinationem inclinatae, tempora lationum per ipsas erunt æqualia: sed tempus per H E breviorem ipsa I E est brevius tempore per I E; ergo tempus quoque per C E, (quod æquatur tempori per H E,) brevius erit tempore per I E. Patet ergo propositum.

THEOR. XX. PROP. XXXI.

Si linea recta super horizontalem fuerit utcunque inclinata: planum a dato puncto in horizontali usque ad inclinatam extensum, in quo descensus fit tempore omnium brevissimo, est illud, quod bifariam dividit angulum contentum a duabus perpendicularibus a dato puncto extensis, una ad horizontalem lineam, altera ad inclinatam.

Sit C D (Fig. xci.) linea supra horizontalem A B utcunque inclinata, datoque in horizontali quocunque puncto A, educantur ex eo A C perpendicularis ad A B, A E vero perpendicularis ad C D, et angulum C A E bifariam dividat F A linea. Dico, planorum omnium ex quibuslibet punctis lineae C D ad punctum A inclinatorum extensum per F A esse, in quo tempore omnium brevissimo

fiat descensus. Ducatur F G ipsi A E parallela, erunt anguli G F A, F A E coalterni aequales: est autem E A F ipsi F A G aequalis: ergo trianguli latera F G, G A aequalia erunt. Si itaque centro G intervallo G A circulus describatur, transibit per F et horizontalem, et inclinatam tanget in punctis A F: est enim angulus G F C rectus, cum G F ipsi A E sit aequidistans: ex quo constat lineas omnes usque ad inclinatam ex puncto A productas extra circumferentiam extendi, et quod consequens est, lationes per ipsas longiori tempore absolvi, quam per F A. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

Si duo circuli se se intus contingant, quorum interiorem quaelibet linea recta contingat, exteriorem vero secet, tres lineae a contactu circulorum ad tria puncta rectae lineae tangentis, nempe ad contactum interioris circuli, et ad sectiones exterioris protractae angulos in contactu circulorum aequales continebunt.

Tangant se intus in puncto A (Fig. xcii.) duo circuli, quorum centra, B minoris, C majoris: interiorem vero circulum contingat recta quaelibet linea F G in puncto H, majorem autem secet in punctis F, G,

et connectantur tres lineae A F, A H, A G. Dico, angulos ab illis contentos F A H, G A H esse aequales. Extendatur A H usque ad circumferentiam in I, et ex centris producantur B H, C I, et per eadem centra ducta sit B C, quae extensa cadet in contactum A, et in circumferentias circulorum in O, et N. Et quia anguli I C N, H B O aequales sunt, cum quilibet ipsorum duplus sit anguli I A N, erunt lineae B H, C I parallelae. Cumque B H ex centro ad contactum sit perpendicularis ad F G, erit quoque ad eandem perpendicularis C I, et arcus F I arcui I G aequalis, et quod consequens est, angulus F A I, angulo I A G. Quod erat ostendendum.

THEOR. XXI. PROP. XXXII.

Si in horizonte sumantur duo puncta, et ab altero ipsorum quaelibet linea versus alterum inclinetur, ex quo ad inclinatam recta linea ducatur, ex ea partem abscindens aequalem ei, quae inter puncta horizontis intercipitur, casus per hanc ductam citius absolvetur, quam per quascunque alias rectas ex eodem puncto ad eandem inclinatam protractas. In aliis autem, quae per angulos aequales hinc inde ab hac distiterint, casus fiunt temporibus inter se aequalibus.

Sint in horizonte duo puncta A, B (Fig. XCIII.), et e B inclinetur recta B C, in qua ex termino B sumatur B D ipsi B A aequalis, et jungatur A D. Dico, casum per A D velocius fieri, quam per quamlibet ex A ad inclinatam B C productam. Ex punctis enim A, D ad ipsas B A, B D, perpendiculares ducantur A E, D E, sese in E secantes; et quia in triangulo aequicruri A B D anguli B A D, B D A sunt aequales, erunt reliqui ad rectos D A E, E D A aequales, ergo centro E intervallo E A descriptus circulus per D quoque transibit: et lineas B A, B D tanget in punctis A, D. Et cum A sit terminus perpendiculi A E, casus per A D citius absolvetur, quam per quamcunque aliam ex eodem termino A usque ad lineam B C ultra circumferentiam circuli extensam, quod erat primo ostendendum.

Quod si extenso perpendiculo A E, in eo sumatur quodvis centrum F, et secundum intervallum F A circulus A G C describatur tangentem lineam in punctis G, C secans: junctae A G, A C per angulos aequales a media A D ex ante demonstratis dirimentur, et per ipsas lationes temporibus aequalibus absolventur, cum ex puncto sublimi A ad circumferentiam circuli A G C terminentur.

PROBL. XII. PROP. XXXIII.

Dato perpendiculo, et plano ad ipsum inclinato, quorum eadem sit altitudo, idemque terminus sublimis, punctum in perpendiculo supra terminum communem reperire, ex quo si demittatur mobile, quod postea convertatur per planum inclinatum, ipsum planum conficiat tempore eodem, quo ipsum perpendiculum ex quiete conficeret.

Sint perpendiculum, et planum inclinatum, quorum eadem sit altitudo, A B, A C (Fig. XCIV.) oportet in perpendiculo B A, producto ex parte A, punctum reperire, ex quo descendens mobile conficiat spatium A C eodem tempore, quo conficit datum perpendiculum A B ex quiete in A. Ponatur D C E ad angulos rectos ad A C, et secetur C D aequalis A B, et jungatur A D: erit angulus A D C major angulo C A D, (est enim C A major quam A B, seu C D.) fiat angulus D A E aequalis angulo A D E, et ad ipsam A E perpendicularis sit E F plano inclinato, et utrique extenso occurrens in F, et utraque A I, A G ponatur ipsi C F aequalis, et per G ducatur G H horizonti aequidistans. Dico, H esse punctum, quod quaeritur.

Intelligatur enim tempus casus per perpendiculum A B esse A B, erit tempus per A C ex quiete in A ipsamet A C. Cumque in triangulo rectangulo A E F ab angulo recto E perpendicularis ad basim A F sit acta E C, erit A E media inter F A, A C, et C E media inter A C, C F, hoc est, inter C A, A I, et cum ipsius A C tempus ex A sit A C; erit A E tempus totius A F, et E C tempus ipsius A I. Quia vero in triangulo æquicruri A E D latus A E æquale lateri E D, erit E D tempus per A F, et est E C tempus per A I; ergo C D, hoc est A B, erit tempus per I F ex quiete in A, quod idem est ac si dicamus, A B esse tempus per A C ex G, seu ex H; quod erat faciendum.

PROBL. XIII. PROP. XXXIV.

Dato plano inclinato, et perpendiculo, quorum idem sit sublimis terminus, punctum sublimius in perpendiculo extenso reperire, ex quo mobile decidens, et per planum inclinatum conversum utcunque, conficiat tempore eodem, ac solum planum inclinatum ex quiete in ejus superiori termino.

Sint planum inclinatum, et perpendiculum, A B, A C (Fig. xcv.) quorum

idem sit terminus A. Oportet in perpendiculo ad partes A extenso punctum sublime reperire, ex quo mobile decidens, et per planum A B conversum, partem assumptam perpendiculi, et planum A B, conficiat tempore eodem, ac solum planum A B ex quiete in A.

Sit horizontalis linea B C, et secetur A N æqualis A C: et ut A B ad B N; ita fiat A L ad L C: et ipsi A L ponatur æqualis A I, et ipsarum A C, B I, tertia proportionalis sit C E in perpendiculo A C producto signata. Dico, C E esse spatium quæsitum: adeo ut extenso perpendiculo supra A, et assumpta parte A X ipsi C E æquali, mobile ex X conficiet utrumque spatium X A B æquali tempore, ac solum A B ex A Ponatur horizontalis X R æquidistans B C, cui occurrat B A extensa in R, deinde producta A B in D, ducatur E D æquidistans C B, et supra A D semicirculus describatur, et ex B ipsi D A perpendicularis erigatur B F usque ad circumferentiam. Patet, F B esse mediam inter A B, B D, et ductam F A mediam inter D A, A B Ponatur B S æqualis B I, et F H æqualis F B. Et quia, ut A B ad B D, ita A C ad C E, estque B F media inter A B, B D, et B I media inter A C, C E; erit ut B A ad A C, ita F B ad B S. Et cum sit ut B A ad A C, seu ad A N, ita F B ad B S, erit per conversionem rationis B F ad F S, ut A B ad B N,

hoc est, A L ad L C; rectangulum igitur sub F B, C L, aequatur rectangulo sub A L, S F; hoc autem rectangulum A L, S F, est excessus rectanguli sub A L, F B, seu A I, B F, super rectangulo A I, B S, seu A I B; rectangulum vero F B, L C est excessus rectanguli A C, B F, super rectangulo A L, B F; rectangulum autem A C, B F, aequatur rectangulo A B I; (est enim ut B A ad A C, ita F B, ad B I) excessus igitur rectanguli A B I super rectangulo A I, B F, seu A I, F H, aequatur excessui rectanguli A I, F H, super rectangulo A I B; ergo bina rectangula A I, F H, æquantur duobus A B I, A I B: nempe binis A I B, cum quadrato B I. Commune sumatur quadratum A I, erunt bina rectangula A I B, cum duobus quadratis A I, I B, nempe quadratum ipsum A B, aequale binis rectangulis A I, F H, cum quadrato A I. Communiter rursus assumpto quadrato B F, erunt duo quadrata A B, B F; nempe unicum quadratum A F, aequale binis rectangulis A I, F H, cum duobus quadratis A I, F B, id est A I, F H. Verum idem quadratum A F aequale est binis rectangulis A H F, cum duobus quadratis A H, H F; ergo bina rectangula A I, F H, cum quadratis A I, F H, eaqualia sunt binis rectangulis A H F cum quadratis A H, H F; et dempto communi qua-

drato H F bina rectangula A I, F H, cum quadrato A I erunt æqualia qinis rectangulis A H F cum quadrato A H. Cumque rectangulorum omnium F H sit latus commune, erit linea A H aequalis lineae A I; si enim major, vel minor esset, rectangula quoque F H A, et quadratum H A, majora vel minora essent rectangulis F H, I A, et quadrato I A; contra id, quod demonstratum est.

Modo si intelligamus tempus casus per A B esse ut A B, tempus per A C erit ut A C, et ipsa I B media inter A C, C E, erit tempus per C E, seu per X A ex quiete in X, cumque inter D A, A B, seu R B, B A media sit A F, inter vero A B, B D, id est R A, A B, media sit B F, cui æquatur F H, erit ex prædemonstratis excessus A H tempus per A B ex quiete in R, seu post casum ex X; dum tempus ejusdem A B ex quiete in A fuerit A B. Tempus igitur per X A, est I B; per A B vero post R A, seu post X A, est A I; ergo tempus per X A B erit ut A B, idem nempe cum tempore per solam A B ex quiete in A. Quod erat propositum.

PROBL. XIV. PROP. XXXV.

Data inflexa ad datum perpendiculum, partem in inflexa accipere, in qua sola ex quiete fiat motus eodem tempore, atque in eadem cun perpendiculo.

Sit perpendiculum A B; (Fig. cvi.) et ad ipsum inflexa B C. Oportet in B C partem accipere, in qua sola ex quiete fiat motus eodem tempore, ac in eadem cum perpendiculo A B. Ducatur horizon A D, cui inclinata C B extensa occurrat in E, ponaturque B F æqualis B A; et centro E intervallo E F circulus describatur F I G; et F E ad circumferentiam usque protrahatur in G; et ut G B ad B F, ita fiat B H ad H F; et H I circulum tangat in I. Deinde ex B perpendicularis ad F C erigatur B K, cui occurrat in L linea E I L; tandem ipsi E L perpendicularis ducatur L M occurrens B G in M. Dico, in linea B M ex quiete in B fieri motum eodem tempore, ac ex quiete in A per ambas A B, B M. Ponatur E N æqualis E L. Cumque ut G B ad BF, ita sit B H ad H F; erit permutando, ut G B ad B H, ita B F ad F H et dividendo G H ad H B, ut B H ad H F. Quare rectangulum G H F quadrato H B erit æquale: sed idem rectangulum æquatur quoque quadrato H I;

ergo B H ipsi H I est æqualis. Cumque in quadrilatero I L B H latera H B, H I sint æqualia, et anguli B, I recti, erit latus quoque B L ipsi L I æquale: est autem E I æqualis E F; ergo tota L E, seu N E, duabus L B, E F est æqualis: auferatur communis E F; erit reliqua F N ipsi L B æqualis; at posita est F B æqualis ipsi B A; ergo L E duabus A B, B N æquatur. Rursus si intelligatur, tempus per A B esse ipsam A B; erit tempus per E B ipsi E B æquale: tempus autem per totam E M erit E N, media scilicet inter M E; E B; quare reliquæ B M tempus casus post E B, seu post A B, erit ipsa B N. Positum autem est, tempus per A B esse A B: ergo tempus casus per ambas A B M est A B N; cum autem tempus per E B ex quiete in E sit E B; tempus per B M ex quiete in B erit media proportionalis inter B E; B M; haec autem est B L: tempus igitur per ambas A B M ex quiete in A est A B N; tempus vero per B M solam ex quiete in B est B L: ostensum autem est, B L esse æqualem duabus A B, B N; ergo patet propositum.

Aliter magis expedite.

Sit B C (Fig. xcvii) planum inclinatum, B A perpendiculum. Ducta perpendiculari per B ad E C, et utrinque extensa, ponatur B H æqualis excessus B E super B A: et angulo B H E ponatur æqualis angulus H E L: ipsa vero E L extensa oc-

currat B K in L; et ex L excitetur perpendicularis ad E L, L M occurrens B C in M. Dico, B M esse spatium in plano E C quæsitum. Quia enim angulus M L E rectus est, erit B L media inter M B, B E; et L E media inter M E, E B, cui E L secetur æqualis E N; et erunt tres lineæ N E, E L, L H æquales, et H B erit excessus N E super B L. Verum eadem H B est etiam excessus N E super N B, B A; ergo duæ N B, B A, æquales sunt B L. Quod si ponatur, E B esse tempus per E B; erit B L tempus per B M ex quiete in B; et B N erit tempus ejusdem post E B, seu post A B; et A B erit tempus per A B; ergo tempora per A B M, nempe A B N, æqualia sunt tempori per solam B M ex quiete in B: quod est intentum.

LEMMA.

Sit D C (Fig. XCVIII) ad diametrum B A perpendicularis, et a termino B educatur B D E utcunque, et connectatur F B. Dico, F B inter D B, B E esse mediam. Connectatur E F: et per B ducatur tangens B G; quæ erit ipsi C D parallela: quare angulus D B G angulo F D B erit æqualis: at eidem G B D æquatur quoque angulus E F B in portione alterna: ergo similia sunt triangula F B D, F E B; et ut B D ad B F, ita F B ad B E.

LEMMA.

Sit linea A C, (Fig. XCIX.) major ipsa D F; et habeat A B ad B C majorem rationem, quam D E ed E F. Dico, A B ipsa D E esse majorem. Quia enim A B ad B C majorem rationem habet, quam D E ad E F, quam rationem habet A B ad B C, hanc habebit D E ad minorem quam E F: habeat ad E G: et quia A B ad B C est, ut D E ad E G, erit componendo, et per conversionem rationis, ut C A ad A B, ita G D ad D E: est autem C A major G D: ergo B A ipsa D E major erit.

LEMMA.

Sit circuli quadrans A C I B. (Fig. c.) et ex B ipsi A C parallela B E; et ex quovis centro in ea sumpto circulus B O E S descriptus tangens A B in B, et secans circumferentiam quadrantis in I; et juncta sit C B, et C I usque ad S extensa. Dico, lineam C I minorem semper esse ipsa C O. Jungatur A I, quæ circulum B O E tanget. Si enim ducatur D I, erit æqualis ipsi D B; cum vero D B quadrantem tangat, tanget etiam eumdem D I: et

ad diametrum A I erit perpendicularis. Quare et ipsa A I circulum B O E tanget in I. Et quia angulus A I C major est angulo A B C, cum majori insistat peripheriæ: ergo angulus quoque S I N ipso A B C major erit; quare portio I E S major est portione B O; et linea C S centro vicinior major ipsa C B: quare et C O major C I; cum S C ad C B sit, ut O C ad C I.

Idem autem magis accidet, si (ut in altera figura) B I C (Fig. 61.) quadrante fuerit minor; nam perpendicularis D B circulum secabit C I B; quare D I quoque, cum ipsi D B sit æqualis, et angulus D I A erit obtusus, et ideo A I N circulum quoque B I N secabit: cumque angulus A B C minor sit angulo A I C, qui æquatur ipsi S I N; iste autem est adhuc minor eo, qui ad contactum in I fieret per lineam S I; ergo portio S E I est longe major portione B O; unde, etc. quod erat demonstrandum.

THEOR. XXII. PROP. XXXVI.

Si in circulo ad horizontem erecto ab imo puncto elevetur planum non majorem subtendens circumferentiam quadrante, a terminis cujus duo alia plana ad quodlibet circumferentiae punctum infle-

cantur, descensus in planis ambobus inflexis breviori tempore absolvetur, quam in solo priori plano elevato, vel quam in altero tantum ex illis duobus, nempe in inferiori.

Sit circuli ad horizontem erecti ab imo puncto C (Fig. CII.) circumferentia C B D, non major quadrante, in qua sit planum elevatum C D, et duo plana a terminis D, C, inflexa ad quodlibet punctum B in circumferentia sumptum: dico, tempus descensus per ambo plana D B C brevius esse tempore descensus per solum D C, vel per unicum B C ex quiete in B. Ducta sit per D horizontalis M D A; cui C B extensa occurrat in A: sintque D N, M C ad M D, et B N ad B D perpendiculares: et circa triangulum rectangulum D B N semicirculus describatur D F B N, secans D C in F: et ipsarum C D, D F media sit proportionalis D O; ipsarum autem C A, A B media sit A V. Sit autem P S tempus, quo peragitur tota D C, vel B C, (constat enim, tempore eodem peragi utramque) et quam rationem habet C D ad D O, hanc habeat tempus S P ad tempus P R: erit tempus P R id, in quo mobile ex D peragit D F; R S vero id, in quo reliquum F C. Cum vero P S sit quoque tempus, quo mobile ex B peragit B C; si fiat ut B C ad C D, ita S P ad P T; erit P T tempus casus ex A in C; cum D C media sit inter A C, C B, ex ante demonstratis. Fiat tantum, ut C A

ad A V, ita T P ad P G; erit P G tempus, quo mobile ex A venit in B; G T vero tempus residuum motus B C consequentis post motum ex A in B. Cum vero D N circuli D F N diameter ad horizontem sit erecta, temporibus aequalibus peragentur D F et D B lineae. Quare si demonstratum fuerit, mobile citius permeare B C post casum D B, quam F C post peractam D F, habebimus intentum. At eadem temporis celeritate conficit mobile veniens ex D per D B ipsam B C; ac si venerit ex A per A B; cum ex utroque casu D B, A B, aequalia accipiat velocitatis momenta; ergo demostrandum erit, breviori tempore peragi B C post A B quam F C post D F. Explicatum est autem, tempus, quo peragitur B C post A B, esse G T: tempus vero ipsius F C post D F esse R S. Ostendendum itaque est, R S majus esse quam G T: quod sic ostenditur; quia ut S P ad P R, ita C D ad D O per conversionem rationis; et convertendo, ut R S ad S P, ita O C ad C D: ut autem S P ad P T, ita D C ad C A: et quia est ut T P ad P G, ita C A ad A V; per conversionem rationis erit quoque ut P T ad T G, ita A C ad C V; ergo ex aequali, ut R S ad G T, ita O C ad C V; est autem O C major quam C V, ut mox demonstrabitur; ergo tempus R S majus est tempore G T; quod demonstrare oportebat. Cum vero C F

major sit C B, F D vero minor B A; habebit C D ad D F majorem rationem, quam C A ad A B; ut autem C D ad D F, ita quadratum C O ad quadratum O F; cum sint C D, D O, D F, proportionales, ut vero C A ad A B, ita quadratum C V ad quadratum V B; ergo C O ad O F majorem rationem habet quam C V ad V B; igitur ex Lemmate prædicto C O major est quam C V. Constat insuper, tempus per D C ad tempus per D B C esse, ut D O C ad D O cum C V.

SCHOLIUM.

Ex his, quae demonstrata sunt, colligi posse videtur, lationem omnium velocissimam ex termino ad terminum, non per brevissimam lineam, nempe per rectam, sed per circuli portionem fieri. In quadrante enim B A E C, cujus latus B C (Fig. CIII) sit ad horizontem erectum, divisus sit arcus A C in quotcunque partes aequales, A D, D E, E F, F G, G C; et ductae sint rectae ex C ad puncta A, D, E, F, G; et junctae sint rectae quoque A D, D E, E F, F G, G C. Manifestum est, lationem per duas A D C citius absolvi, quam per unam A C, vel D C ex quiete in D; sed ex quiete in A citius absolvitur D C, quam duae A D C; sed per duas D E C ex quiete in A verisimile est citius absolvi

descensum, quam per solam C D. Ergo descensus per tres A D E C absolvitur citius, quam per duas A D C. Verum similiter procedente descensu per A D E, citius fit latio per duas E F C, quam per solam E C. Ergo per quatuor A D E F C citius fit motus, quam per tres A D E C. Ac tandem per duas F G C post praecedentem descensum per A D E F citius absolvitur latio, quam per solam F C. Ergo per quinque A D, E F G C breviori adhuc tempore fit descensus, quam per quatuor A D E F C. Quo igitur per inscriptos polygonos magis ad circumferentiam accedimus, eo citius absolvitur motus inter duos terminos signatos A C.

Quod autem in quadrante explicatum est, contigit etiam in circumferentia quadrante minori; et idem est ratiocinium.

PROBL. XV. PROP. XXXVII.

Dato perpendiculo, et plano inclinato, quorum eadem sit elevatio, partem in inclinato reperire, quae sit aequalis perpendiculo, et conficiatur eodem tempore ac ipsum perpendiculum.

Sint A B (Fig. CIV.) perpendiculum, et A C planum inclinatum. Oportet in inclinato partem reperire aequalem perpendiculo A B, quae post quietem in A con-

ficiatur tempore aequali tempori, quo conficitur perpendiculum. Ponatur A D aequalis A B; et reliqua D C bifariam secetur in I; et ut A C ad C I, ita fiat C I ad aliam A E; cui ponatur aequalis D G. Patet, E G aequalem esse A D, et A B. Dico insuper, hanc E G eam esse, quae conficitur a mobili veniente ex quiete in A tempore aequali tempori, quo mobile cadit per A B. Quia enim, ut A C ad C I, ita C I ad A E, seu I D ad D G; erit per conversionem rationis, ut C A ad A I, ita D I ed I G. Cum itaque sit ut totum C A ad totum A I, ita ablatum C I ad ablatum I G: erit reliquum A ad reliquum A G, ut totum C A ad totum A I. Est itaque A I media inter C A, A G; et C I media inter C A, A E. Si itaque ponatur, tempus per A B esse ut A B, erit A C tempus per A C; et C I, seu I D tempus per A E; cumque A I media sit inter C A, A G; sitque C A tempus per totam A C; erit A I tempus per A G: et reliquum I C per reliquum G C: fuit autem D I tempus per A E: sunt itaque D I, I C tempora per utrasque A E, C G; ergo reliquum D A erit tempus per E G, aequale nempe tempori per A B. Quod faciendum fuit.

COROLLARIUM.

Ex his constat, spatium quaesitum esse intermedium inter partes superam, et inferam, quae temporibus aequalibus conficiuntur.

PROBL. XVI. PROP. XXXVIII.

Datis duobus planis horizontalibus a perpendiculo sectis, in perpendiculo punctum sublime reperire, ex quo cadentia mobilia, et in planis horizontalibus reflexa conficiant in temporibus aequalibus temporibus casuum in iisdem horizontalibus, in superioribus nempe, atque in inferiore, spatia, quae inter se habeant quamcumque datam rationem minoris ad majorem.

Secta sint plana horizontalia, C D, B E (Fig. cv.), a perpendiculo A C B, sitque data ratio minoris ad majorem N ad F G. Oportet in perpendiculo A B punctum sublime reperire, ex quo mobile cadens, et in plano C D reflexum tempore æquali tempori sui casus spatium conficiat, quod ad spatium ab altero mobili ex eodem puncto sublimi veniente tempore aequali tempori sui casus, motu reflexo per B E planum, habeat rationem eandem cum data N ad F G. Ponatur G H

aequalis ipsi N; et ut F H ad H G, ita fiat B C ad C L. Dico, L esse punctum sublime quaesitum. Accepta enim C M dupla ad C L, ducatur L M plano B E occurrens in O; erit B O dupla B L. Et quia, ut F H ad H G, ita B C ad C L; erit componendo, et convertendo, ut H G, hoc est N ad G F, ita C L ad L B, hoc est C M ad B O. Cum autem C M dupla sit ad L C, fit, spatium C M esse illud, quod a mobili veniente ex L post casum L C conficitur in plano C D; et eadem ratione B O esse illud, quod conficitur post casum L B in tempore aequali tempori casus per L B; cum B O sit dupla ad B L; ergo patet propositum.

Sagr. Parmi veramente, che conceder si possa al nostro Accademico, che egli senza jattanza abbia nel principio di questo suo trattato potuto attribuirsi di arrecarci una nuova scienza intorno a un suggetto antichissimo. Ed il vedere con quanta felicità e chiarezza da un solo semplicissimo principio ei deduca le dimostrazioni di tante proposizioni, mi fa non poco maravigliare, come tal materia sia passata intatta da Archimede, Apollonio, Euclide, e tanti altri Matematici e Filosofi illustri, e massime che del moto si trovano scritti volumi grandi, e molti.

Salv. Si vede un poco di fragmento d' Euclide intorno al moto, ma non vi si scorge vestigio, che egli s' incamminasse

all' investigazione della proporzione della accelerazione, e delle sue diversità sopra le diverse inclinazioni. Talchè veramente si può dire essersi non prima che ora aperta la porta ad una nuova contemplazione, piena di conclusioni infinite ed ammirande, le quali nei tempi avvenire potranno esercitare altri ingegni.

Sagr. Io veramente credo, che siccome quelle poche passioni (dirò per esempio) del cerchio dimostrate nel terzo de' suoi elementi da Euclide sono l'ingresso ad innumerabili altre più recondite; così le prodotte, e dimostrate in questo breve trattato, quando passasse nelle mani di altri ingegni speculativi, farebbe strada ad altre ed altre più maravigliose; ed è credibile, che così seguirebbe mediante la nobiltà del soggetto sopra tutti gli altri naturali.

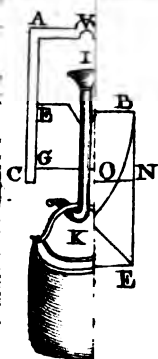
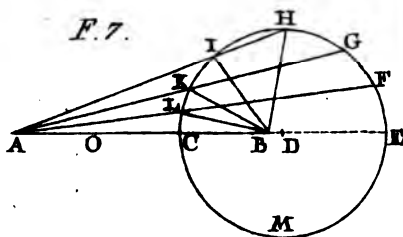
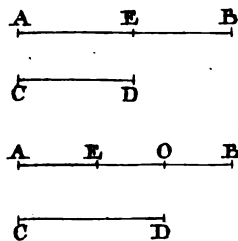
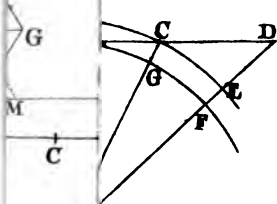
Lunga ed assai laboriosa giornata è stata questa d' oggi, nella quale ho gustato più delle semplici proposizioni, che delle loro dimostrazioni, molte delle quali credo, che per ben capirle mi porteranno via più d' un' ora per ciascheduna: studio che mi riserbo a farlo con quiete, lasciandomi V. S. il libro nelle mani, dopo che avremo veduto questa parte, che resta intorno al moto dei Projetti; che sarà, se così gli piace, nel seguente giorno.

Salv. Non mancherò d' esser con loro.

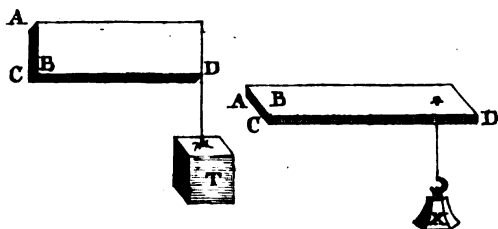
Fine del Volume VIII.

INDICE

Del presente Volume.

			ERRORI	CORREZIONI
Pag.	14	l. 12.	dalla	della
	16	» ul.	V. S. e il Sig.	V. S.
	37	» 3	macchi-ne	macchi-na
	54	» 3	scodela	scodella
	89	» 7	poligno	poligono
	267	» 2	linae » 3 linae	lineæ » 3 lineæ
	267	» 13	ominum	omnium
	270	» 22	*tempo-bus*	*tempo-ribus*
	315	» 18	(Fig. LXXVI.)	(Fig. LXXIV.)
	317	» 5	iter	inter
	344	» 30	eaqualia	æqualia
	345	» 2	qinis	binis.

F. 7.
F. 13.
F. 18.

OPERE

DI

GALILEO GALILEI

NOBILE FIORENTINO.

VOLUME NONO.

MILANO

Dalla Società Tipografica de' Classici Italiani
contrada del Cappuccio
anno 1811.

GIORNATA QUARTA.

Salv. A tempo arriva ancora il Signor Simpl. però senza interpor quiete venghiamo al moto, ed ecco il Testo del nostro Autore.

DE MOTU PROJECTORUM.

Quæ in motu æquabili contingunt accidentia, itemque in motu naturaliter accelerato super quascunque planorum inclinationes, supra consideravimus. In hac, quam modo aggredior, contemplatione, præcipua quædam symptomata, eaque scitu digna in medium afferre conabor, eademque firmis demonstrationibus stabilire,

quæ mobili accidunt dum motu ex duplici latione composito, æquabili nempe, et naturaliter accelerato, movetur: hujusmodi autem videtur esse motus ille, quem de projectis dicimus; cujus generationem talem constituo.

Mobile quoddam super planum horizontale projectum mente concipio omni secluso impedimento: jam constat ex his, quæ fusius alibi dicta sunt, illius motum æquabilem, et perpetuum super ipso plano futurum esse, si planum in infinitum extendatur: si vero terminatum, et in sublimi positum intelligamus, mobile, quod gravitate præditum concipio, ad plani terminum delatum, ulterius progrediens, æquabili, atque indelebili priori lationi superaddet illam, quam a propria gravitate habet deorsum propensionem, indeque motus quidam emerget compositus ex æquabili horizontali, et ex deorsum naturaliter accelerato, quem projectionem voco. Cujus accidentia nonnulla demonstrabimus; quorum primum sit.

THEOR. I. PROP. I.

Projectum dum fertur motu composito ex horizontali aequabili, et ex naturaliter accelerato deorsum, lineam semiparabolicam describit in sua latione.

Sagr. È forza, Sig. Salviati, in grazia di me, ed anco credo io del Sig. Simplicio far qui un poco di pausa; conciossiachè io non mi son tanto inoltrato nella Geometria, ch' io abbia fatto studio in Apollonio, se non in quanto so, ch'ei tratta di queste Parabole, e dell'altre sezioni coniche, senza la cognizione delle quali, e delle lor passioni, non credo, che intender si possano le dimostrazioni di altre proposizioni a quelle aderenti. E perchè già nella bella prima proposizione ci vien proposto dall' Autore doversi dimostrare la linea descritta dal Projetto esser Parabolica, mi vo immaginando, che non dovendosi trattar di altro, che di tali linee, sia assolutamente necessario avere una perfetta intelligenza, se non di tutte le passioni di tali figure dimostrate da Apollonio, almeno di quelle, che per la presente scienza son necessarie.

Salv. V. S. si umilia molto, volendosi far nuovo di quelle cognizioni, le quali non è gran tempo, che ammesse come ben sapute: allora dico, che nel trattato delle Resistenze avemmo bisogno della notizia di certa proposizione di Apollonio, sopra la quale ella non mi mosse difficoltà.

Sagr. Può essere o che io la sapessi per ventura, o che io la supponessi per una volta tanto, che ella mi bisognò in tutto quel trattato: ma qui dove mi immagino di avere a sentir tutte le dimostrazioni circa tali linee, non bisogna, come si dice, bever grosso, buttando via il tempo, e la fatica.

Simp. E poi rispetto a me, quando bene, come credo, il Sig. Sagredo fusse ben corredato di tutti i suoi bisogni, a me cominciano già a giugner come nuovi gli stessi primi termini: perchè sebbene i nostri Filosofi hanno trattata questa materia del Moto de' Projetti, non mi sovvien, che si siano ristretti a definire, quali sieno le linee da quelli descritte, salvo che assai generalmente sien sempre linee curve, eccetto che nelle projezioni perpendicolari sursùm. Però quando quel poco di Geometria, che io ho appreso da Euclide da quel tempo in qua, che noi avemmo altri discorsi, non sia bastante per rendermi capace delle cognizioni necessarie per l'intelligenza delle seguenti dimostrazioni, mi

converrà contentarmi delle sole proposizioni credute, ma non sapute.

Salv. Anzi voglio io, che le sappiate mercè dell' istesso Autor dell' opera, il quale quando già mi concedè di veder questa sua fatica, perchè io ancora in quella volta non aveva in pronto i libri di Apollonio, s' ingegnò di dimostrarmi due passioni principalissime di essa Parabola senza veruna altra precognizione, delle quali sole siamo bisognosi nel presente trattato; le quali son bene anco provate da Apollonio, ma dopo molte altre, che lungo sarebbe a vederle; ed io voglio, che abbreviamo assai il viaggio, cavando la prima immediatamente dalla pura, e semplice generazione di essa Parabola, e da questa poi pure immediatamente la dimostrazione della seconda. Venendo dunque alla prima:

Intendasi il cono retto, la cui base sia il cerchio I B K C (Fig. 1.), e vertice il punto L, nel quale, segato con un piano parallelo al lato L K, nasca la sezione B A C detta Parabola; la cui base B C seghi ad angoli retti il diametro I K del cerchio I B K C, e sia l' asse della Parabola A D parallelo al lato L K; e preso qualsivoglia punto F nella linea B F A, tirisi la retta F E parallela alla B D. Dico, che il quadrato della B D al quadrato della F E ha la medesima proporzione, che l' asse D A alla parte A E. Per lo punto E intendasi passare un piano parallelo al

cerchio I B K C, il quale farà nel cono una sezione circolare, il cui diametro sia la linea G E H. E perchè sopra il diametro I K del cerchio I B K la B D è perpendicolare, sarà il quadrato della B D eguale al rettangolo fatto dalle parti I D, D K. E parimente nel cerchio superiore, che s'intende passare per i punti G F H, il quadrato della linea F E è eguale al rettangolo delle parti G E H. Adunque il quadrato della B D al quadrato della F E ha la medesima proporzione, che il rettangolo I D K al rettangolo G E H. E perchè la linea E D è parallela alla H K, sarà la E H eguale alla D K, che pur son parallele: e però il rettangolo I D K al rettangolo G E H avrà la medesima proporzione, che la I D alla G E, cioè, che la D A alla A E: adunque il rettangolo I D K al rettangolo G E H, cioè il quadrato B D al quadrato F E ha la medesima proporzione, che l'asse D A alla parte A E, che bisognava dimostrare.

L'altra proposizione pur necessaria al presente trattato così faremo manifesta. Segniamo la Parabola, della quale sia prolungato fuori l'asse C A (Fig. 11.) in D, e preso qualsivoglia punto B, per esso intendasi prodotta la linea B C parallela alla base di essa Parabola. E posta la D A eguale alla parte dell'asse C A, dico, che la retta tirata per i punti D, B, non cade dentro alla Parabola, ma fuori, sicchè so-

lamente la tocca nell' istesso punto B. Imperocchè, se è posibile, caschi dentro segandola sopra, o prolungata segandola sotto. Ed in essa sia preso qualsivoglia punto G, per lo quale passi la retta F G E. E perchè il quadrato F E è maggiore del quadrato G E, maggior proporzione avrà esso quadrato F E al quadrato B C, che il quadrato G E al medesimo B C. E perchè per la precedente il quadrato F E al quadrato B C sta come la E A alla A C, adunque maggior proporzione ha la E A alla A C, che il quadrato G E al quadrato B C, cioè che il quadrato E D al quadrato D C (essendochè nel triangolo D G E come la G E alla parallela B C, così sta E D a D C.) ma la linea E A alla A C, cioè alla A D, ha la medesima proporzione, che 4 rettangoli E A D a 4 quadrati di A D, cioè al quadrato C D (che è eguale a 4 quadrati di A D) adunque 4 rettangoli E A D al quadrato C D avranno maggior proporzione, che il quadrato E D al quadrato D C; adunque 4 rettangoli E A D saranno maggiori del quadrato E D: il che è falso, perchè son minori; imperocchè le parti E A, A D della linea E D non sono eguali. Adunque la linea D B tocca la Parabola in B, e non la sega; il che si doveva dimostrare.

Simpl. Voi procedete nelle vostre dimostrazioni troppo alla grande; ed andate sempre, per quanto mi pare, supponendo,

che tutte le proposizioni di Euclide mi siano così familiari e pronte, come gli stessi primi assiomi, il che non è. E pur ora l'uscirmi addosso, che 4 rettangoli E A D son minori del quadrato D E, perchè le parti E A, A D della linea E D non sono eguali, non mi quieta, ma mi lascia sospeso.

Salv. Veramente tutti i Matematici non vulgari suppongono, che il lettore abbia prontissimi almeno gli Elementi di Euclide: e qui per supplire al vostro bisogno basterà ricordarvi una proposizione del secondo, nella quale si dimostra, che quando una linea è segata in parti eguali, ed in diseguali, il rettangolo delle parti diseguali è minore del rettangolo delle parti eguali (cioè, del quadrato della metà) quanto è il quadrato della linea compresa tra i segamenti. Onde è manifesto, che il quadrato di tutta, il quale contiene 4 quadrati della metà, è maggiore di 4 rettangoli delle parti diseguali. Ora di queste due proposizioni dimostrate, prese dagli Elementi Conici, conviene, che tenghiamo memoria, per l' intelligenza delle cose seguenti nel presente trattato: che di queste sole, e non di più si serve l' Autore. Ora possiamo ripigliare il testo per vedere in qual maniera ci vien dimostrando la sua prima proposizione, dove egli intende di provarci la linea descritta dal mobile grave, che mentre ci discende con moto compo-

sto dell' equabile orizzontale, e del naturale descendente, sia una Semiparabola.

Intelligatur horizontalis linea, seu planum A B (Fig. III.) in sublimi positum: super quo ex A in B motu æquabili feratur mobile: deficiente vero plani fulcimento in B superveniat ipsi mobili a propria gravitate motus naturalis deorsum juxta perpendicularem B N. Intelligatur insuper plano A B in directum posita linea B E, tanquam temporis effluxus, seu mensura, super qua ad libitum notentur partes quotlibet temporis æquales, B C, C D, D E, atque ex punctis B, C, D, E, intelligantur productæ lineæ perpendiculo B N æquidistantes: in quarum prima accipiatur quælibet pars C I; cujus quadrupla sumatur in sequenti D F, nonupla E H, et consequenter in reliquis secundum rationem quadratorum ipsarum, C B, D B, E B, seu dicamus, in ratione earundem linearum duplicata. Quod si mobili ultra B versus C æquabili latione lato descensum perpendicularem secundum quantitatem C I superadditum intelligamus, reperietur tempore B C in termino I constitutum. Ulterius autem procedendo, tempore D B, duplo scilicet B C, spatium descensus deorsum erit spatii primi C I quadruplum: demonstratum enim est in primo tractatu, spatia peracta a gravi motu naturaliter accelerato esse in duplicata ratione temporum. Pariterque consequenter spatium E H peractum

tempore B E erit ut 9 adeo ut manifeste constet, spatia E H, D F, C I, esse inter se ut quadrata linearum E B, D B, C B. Ducantur modo a punctis I, F, H, rectæ I O, F G, H L, ipsi E B æquidistantes; erunt H L, F G, I O lineæ lineis E B, D B, C B, singulæ singulis æquales; nec non ipsæ B O, B G, B L ipsis C I, D F, E H æquales. Eritque quadratum H L ad quadratum F G, ut linea L B ad B G: et quadratum F G ad quadratum I O, ut G B ad B O. Ergo puncta I, F, H, sunt in una eademque linea Parabolica. Similiterque demonstrabitur, assumptis quibuscunque temporis particulis æqualibus cujuslibet magnitudinis, loca mobilis simili motu composito lati iisdem temporibus in eadem linea parabolica reperiri. Ergo patet propositum.

Salv. Questa conclusione si raccoglie dal converso della prima delle due proposizioni poste di sopra: imperocchè descritta per esempio la Parabola per li punti B, H, se alcuno delli due F, I non fusse nella descritta linea parabolica, sarebbe dentro, o fuori; e per conseguenza la linea F G sarebbe o minore, o maggiore di quella, che andasse a terminare nella linea Parabolica: onde il quadrato della H L non al quadrato della F G, ma ad altro maggiore, o minore avrebbe la medesima proporzione, che ha la linea L B alla B G, ma la ha al quadrato della F G; adunque

il punto F è nella Parabolica; e così tutti gli altri, ec.

Sagr. Non si può negare, che il discorso non sia nuovo, ingegnoso, e concludente, argomentando *ex suppositione*, supponendo cioè che il moto traversale si mantenga sempre equabile, e che il naturale *deorsum* parimente mantenga il suo tenore di andarsi sempre accelerando secondo la proporzion duplicata dei tempi: e che tali moti, e loro velocità nel mescolarsi non si alterino, perturbino, ed impediscano, sicchè finalmente la linea del projetto non vada nella continuazion del moto a degenerare in un' altra specie; cosa, che mi si rappresenta come impossibile. Imperocchè, stante che l'asse della Parabola nostra, secondo il quale noi supponghiamo farsi il moto naturale dei gravi, essendo perpendicolare all' Orizzonte, va a terminar nel centro della Terra, ed essendo che la linea Parabolica si va sempre slargando dal suo asse, niun projetto andrebbe giammai a terminar nel centro, o se vi andrebbe, come par necessario, la linea del projetto traligneerebbe in altra diversissima dalla Parabolica.

Simp. Io a queste difficoltà ne aggiungo dell' altre: una delle quali è, che noi supponghiamo, che il piano orizzontale, il quale non sia nè acclive, nè declive, sia una linea retta; quasi che una simil linea sia in tutte le sue parti egualmente

distante dal centro, il che non è vero; perchè partendosi dal suo mezzo va verso le estremità sempre più, e più allontanandosi dal centro, e però ascendendo sempre; il che si tira in conseguenza esser impossibile, che il moto si perpetui, anzi che nè pur per qualche spazio si mantenga equabile, ma ben sempre vada languendo. In oltre è per mio credere impossibile lo schivar l'impedimento del mezzo, sicchè non levi l'equabilità del moto trasversale, e la regola dell'accelerazione nei gravi cadenti. Dalle quali tutte difficoltà si rende molto improbabile, che le cose dimostrate con tali supposizioni incostanti possano poi nelle praticate esperienze verificarsi.

Salv. Tutte le promosse difficoltà, e instanze son tanto ben fondate, che stimo essere impossibile il rimuoverle; ed io per me le ammetto tutte, come anco credo, che il nostro Autore esso ancora le ammetterebbe. E concedo, che le conclusioni così in astratto dimostrate si alterino in concreto, e si falsifichino a segno tale, che nè il moto trasversale sia equabile, nè l'accelerazione del naturale sia colla proporzion supposta, nè la linea del projetto sia Parabolica, ec. Ma bene all'incontro domando, che elle non contendano al nostro Autor medesimo quello, che altri grandissimi uomini hanno supposto, ancorchè falso. E la sola autorità di Archimede può quietare ogn'uno: il quale nelle sue Mec-

caniche, e nella prima quadratura della Parabola piglia come principio vero, l'ago della bilancia, o stadera essere una linea retta in ogni suo punto egualmente distante dal centro comune dei gravi; e le corde alle quali sono appesi i gravi esser tra di loro parallele. La qual licenza viene da alcuni scusata, perchè nelle nostre pratiche gli strumenti nostri, e le distanze, le quali vengono da noi adoperate, sòn così piccole in comparazione della nostra gran lontananza dal centro del globo terrestre, che ben possiamo prendere un minuto di un grado del cerchio massimo, come se fusse una linea retta; e due perpendicoli, che dai suoi estremi pendessero, come se fussero paralleli. Che quando nelle opere pratiche si avesse a tener conto di simili minuzie, bisognerebbe cominciare à riprendere gli Architetti, li quali col perpendicolo suppongono di alzar le altissime torri tra linee equidistanti. Aggiungo qui, che noi possiamo dire, che Archimede, e gli altri supposero nelle loro contemplazioni esser costituiti per infinita lontananza remoti dal centro: nel qual caso i loro assunti non erano falsi; e che però concludevano con assoluta dimostrazione. Quando poi noi vogliamo praticare in distanza terminata le conclusioni dimostrate, col suppor lontananza immensa, dobbiamo difalcar dal vero dimostrato quello, che impor-

ta il non esser stata la lontananza dal centro realmente infinita, ma ben tale, che domandar si può immensa in comparazione della piccolezza degli artificj praticati da noi, il maggior dei quali sarà il tiro dei Projetti, e di questi quello solamente dell'Artiglierie; il quale per grande che sia non passerà 4. miglia di quelle, delle quali noi siamo lontani dal centro quasi altrettante migliaja; ed andando questi a terminar nella superficie del globo terrestre, ben potranno solo insensibilmente alterar quella figura parabolica, la quale si concede, che sommamente si trasformerebbe nell'andare a terminar nel centro. Quanto poi al perturbamento procedente dall'impedimento del mezzo, questo è più considerabile, e per la sua tanto moltiplice varietà incapace di poter sotto regole ferme esser compreso, e datone scienza; attesochè, se noi metteremo in considerazione il solo impedimento, che arreca l'aria ai moti considerati da noi, questo si troverà perturbargli tutti, e perturbargli in modi infiniti, secondo che in infiniti modi si variano le figure, le gravità, e le velocità dei mobili. Imperocchè quanto alla velocità, secondo che questa sarà maggiore, maggiore sarà il contrasto fattogli dall'aria, la quale anco impedirà più i mobili, secondo che saranno men gravi: talchè sebbene il grave descendente dovrebbe andare accêlerandosi in duplicata proporzione del-

la durazion del suo moto, tuttavia per gravissimo che fusse il mobile, nel venir da grandissime altezze, sarà tale l'impedimento dell'aria, che gli torrà il poter crescere più la sua velocità, e lo ridurrà ad un moto uniforme, ed equabile: e questa adequazione tanto più presto, ed in minori altezze si otterrà, quanto il mobile sarà men grave. Quel moto anco, che nel piano orizzontale, rimossi tutti gli altri ostacoli, dovrebbe essere equabile, e perpetuo, verrà dall'impedimento dell'aria alterato, e finalmente fermato: e qui ancora tanto più presto, quanto il mobile sarà più leggiero. Dei quali accidenti di gravità, di velocità, ed anco di figura, come variabili in modi infiniti, non si può dar ferma scienza. E però per poter scientificamente trattar cotal materia bisogna astrar da essi, e ritrovate, e dimostrate le conclusioni astratte dagl'impedimenti servircene nel praticarle con quelle limitazioni, che l'esperienza ci verrà insegnando. E non però piccolo sarà l'utile, perchè le materie, e lor figure saranno elette le men soggette agl'impedimenti del mezzo: quali sono le gravissime, e le rotonde: e gli spazj, e le velocità per lo più non saranno sì grandi, che le loro esorbitanze non possano con facil tara esser ridotte a segno. Anzi pure nei Projetti praticabili da noi, che sieno di materie gravi, e di figura rotonda, ed anco di materie men gravi, e di figura

cilindrica, come frecce, lanciati con frombe, o archi, insensibile sarà del tutto lo svario del lor moto dall'esatta figura Parabolica. Anzi (e voglio pigliarmi alquanto più di licenza) che negli artifizj da noi praticabili la piccolezza loro renda pochissimo notabili gli esterni, ed accidentari impedimenti, tra i quali quello del mezzo è il più considerabile, vi posso io con due esperienze far manifesto. Io farò considerazione sopra i movimenti fatti per l'aria, che tali son principalmente quelli dei quali noi parliamo, contro i quali essa aria in due maniere esercita la sua forza. L'una è coll'impedir più i mobili men gravi, che i gravissimi. L'altra è nel contrastar più alla velocità maggiore, che alla minore dell'istesso mobile. Quanto al primo; il mostrarci l'esperienza, che due palle di grandezza eguali, ma di peso l'una 10, o 12 volte più grave dell'altra, quali sarebbero per esempio una di piombo, e l'altra di rovere, scendendo dall'altezza di 150, e 200 braccia con pochissima differente velocità arrivano in terra, ci rende sicuri, che l'impedimento, e ritardamento dell'aria in amendue è poco; che se la palla di piombo partendosi nell'istesso momento da alto coll'altra di legno, poco fusse ritardata, e questa molto, per assai notabile spazio dovrebbe il piombo nell'arrivare in terra lasciarsi addietro il legno, mentre è 10 volte più grave; il

che tuttavia non accade, anzi la sua anticipazione non sarà nè anco la centesima parte di tutta l'altezza. E tra una palla di piombo, ed una di pietra, che di quella pesasse la terza parte, o la metà, appena sarebbe osservabile la differenza del tempo delle lor giunte in terra. Ora perchè l'impeto, che acquista una palla di piombo nel cadere da un' altezza di 200 braccia (il quale è tanto, che continuandolo in moto equabile scorrerebbe braccia 400. in tanto tempo quanto fu quello della sua scesa) è assai considerabile rispetto alle velocità, che noi con archi, o altre macchine conferiamo a i nostri Projetti (trattone gl' impeti dependenti dal fuoco) possiamo senza errore notabile concludere, e reputar come assolutamente vere le proposizioni, che si dimostreranno senza il riguardo dell' alterazion del mezzo. Circa poi all' altra parte, che è di mostrare, l' impedimento, che l' istesso mobile riceve dall' aria, mentre egli con gran velocità si muove, non esser grandemente maggiore di quello, che gli contrasta nel muoversi lentamente, ferma certezza ce ne porge la seguente esperienza. Sospendasi da due fili egualmente lunghi, e di lunghezza di 4, o 5 braccia due palle di piombo eguali; e attaccati i detti fili in alto si rimuovano amendue le palle dallo stato perpendicolare; ma l' una si allontani per 80, o più gradi, e l' altra non più che 4, o 5; sicchè lasciate in libertà

l'una scenda, e trapassando il perpendicolo descriva archi grandissimi di 160, 150, 140 gradi, ec. diminuendogli appoco appoco: ma l'altra scorrendo liberamente passi archi piccoli di 10, 8, 6, ec. diminuendogli essa ancora appoco appoco. Qui primieramente dico, che in tanto tempo passerà la prima li suoi gradi 180, 160, ec. in quanto l'altra li suoi 10, 8, ec. Dal che si fa manifesto, che la velocità della prima palla sarà 16, e 18 volte maggiore della velocità della seconda; sicchè quando la velocità maggiore più dovesse essere impedita dall'aria, che la minore, più rade devriano esser le vibrazioni negli archi grandissimi di 180, o 160 gradi, ec. che nei piccolissimi di 10, 8, 4, ed anco di 2, e di 1; ma a questo repugna l'esperienza: imperocchè, se due compagni si metteranno a numerare le vibrazioni, l'uno le grandissime, e l'altro le piccolissime, vedranno, che ne numereranno non pur le decine, ma le centinaja ancora, senza discordar di una sola, anzi di un sol punto. E questa osservazione ci assicura congiuntamente delle due proposizioni, cioè che le massime, e le minime vibrazioni si fanno tutte a una a una sotto tempi eguali, e che l'impedimento, e ritardamento dell'aria non opera più nei moti velocissimi, che nei tardissimi; contro a quello, che pur dianzi pareva, che noi ancora comunemente giudicassimo.

Sagr. Anzi, perchè non si può negare, che l'aria impedisca questi, e quelli, poichè e questi, e quelli vanno languendo, e finalmente finiscono, convien dire, che tali ritardamenti si facciano colla medesima proporzione nell'una, e nell'altra operazione. Ma che? L'avere a far maggior resistenza una volta, che un'altra, da che altro procede egli, fuor che dall'essere assalito una volta con impeto, e velocità maggiore, ed un'altra con minore? E se questo è, la quantità medesima della velocità del mobile è cagione, ed insieme misura della quantità della resistenza. Adunque tutti i moti, siano tardi, o veloci, son ritardati e impediti coll'istessa proporzione; notizia pare a me non disprezzabile.

Salv. Possiam per tanto anco in questo secondo caso concludere, che le fallacie nelle conclusioni, le quali astraendo dagli accidenti esterni si dimostreranno, sieno negli artifizi nostri di piccola considerazione, rispetto ai moti di gran velocità, dei quali per lo più si tratta, ed alle distanze, che non sono se non piccolissime in relazione alla grandezza del semidiametro, e dei cerchi massimi del globo terrestre.

Simp. Io volentieri sentirei la cagione per la quale V. S. sequestra i Projetti dall'impeto del fuoco, cioè, come credo, dalla forza della polvere, dagli altri projetti con frombe, archi, o balestre, circa il

non essere nell'istesso modo soggetti all'alterazione, ed impedimento dell'aria.

Salv. Muovemi l'eccessiva, e per modo di dire, furia soprannaturale, colla quale tali projetti vengono cacciati; che bene anco fuora d'iperbole mi par, che la velocità, colla quale vien cacciata la palla fuori di un moschetto, o di una artiglieria, si possa chiamar soprannaturale. Imperocchè scendendo naturalmente per l'aria da qualche altezza immensa una tal palla, la velocità sua mercè del contrasto dell'aria non si andrà accrescendo perpetuamente: ma quello, che nei cadenti poco gravi si vede in non molto spazio accadere, dico di ridursi finalmente a un moto equabile, accaderà ancora dopo la scesa di qualche migliaja di braccia in una palla di ferro, o di piombo, e questa terminata, ed ultima velocità si può dire esser la massima, che naturalmente può ottener tal grave per aria; la qual velocità io reputo assai minor di quella, che alla medesima palla viene impressa dalla polvere accesa. Del che una assai acconcia esperienza ci può render cauti. Sparisi da un'altezza di cento, o più braccia un archibuso con palla di piombo, all'ingiù perpendicolarmente sopra un pavimento di pietra; e col medesimo si tiri contro una simil pietra in distanza di un braccio o due, e vedasi poi qual delle due palle si trovi esser più ammaccata: imperocchè se la venuta da

alto si troverà meno schiacciata dell'altra, sarà segno, che l'aria gli avrà impedita, e diminuita la velocità conferitagli dal fuoco nel principio del moto; e che per conseguenza una tanta velocità non gli permetterebbe l'aria, che ella guadagnasse giammai venendo da quanto si voglia sublime altezza: che quando la velocità impressagli dal fuoco non eccedesse quella, che per se stessa naturalmente scendendo potesse acquistare, la botta all'ingiù dovrebbe più tosto esser più valida, che meno. Io non ho fatto tale esperienza, ma inclino a credere, che una palla di archibuso, o di artiglieria cadendo da un'altezza quanto si voglia grande, non farà quella percossa, che ella fa in una muraglia in lontananza di poche braccia, cioè di così poche, che il breve sdrucito, o vogliam dire scissura da farsi nell'aria, non basti a levar l'eccesso della furia soprannaturale impressagli dal fuoco. Questo soverchio impeto di simili tiri sforzati può cagionar qualche deformità nella linea del projetto; facendo il principio della Parabola meno inclinato, e curvo del fine. Ma questo poco, o niente può esser di pregiudizio al nostro Autore nelle praticabili operazioni: tra le quali principale è la composizione di una Tavola per i tiri, che dicono di Volata, la quale contenga le lontananze delle cadute delle palle tirate secondo tutte le diverse elevazioni. E perchè tali projezioni si fanno

con Mortari, e con non molta carica; in questi non essendo soprannaturale l'impeto, i tiri segnano le lor linee assai esattamente.

Ma intanto procediamo avanti nel trattato, dove l'Autore ci vuole introdurre alla contemplazione, e investigazione dell'impeto del mobile, mentre si muove con moto composto di due. E prima del composto di due equabili, l'uno orizzontale, e l'altro perpendicolare.

THEOR. II. PROP. II.

Si aliquod mobile duplici motu aequabili moveatur, nempe horizontali, et perpendiculari, impetus, seu momentum lationis ex utroque mōtu compositae erit potentia aequalis ambobus momentis priorum motuum.

Moveatur enim aliquod mobile æquabiliter duplici latione: et motioni perpendiculari respondeat spatium A B (Fig. IV.); lationi vero horizontali eodem tempore confectæ respondeat B C. Cum igitur per motus æquabiles conficiantur eodem tempore spatia A B, B C, erunt harum lationum momenta inter se, ut ipsæ A B, B C. Mobile vero, quod secundum hasce duas mu-

tationes movetur, describit diagonalem A C, erit momentum suæ velocitatis ut A C. Verum A C potentia æquatur ipsis A B, B C, ergo momentum compositum ex utrisque momentis A B, B C, est potentia tantum illis simul sumtis æquale; quod erat ostendendum.

Simp. È necessario levarmi un poco di scrupolo, che qui mi nasce, parendomi, che questo, che ora si conclude, repugni ad un'altra proposizione del trattato passato; nella quale si affermava, l'impeto del mobile venente dall'A in B essere eguale al venente dall'A in C, ed ora si conclude l'impeto in C esser maggiore, che in B.

Salv. Le proposizioni Sig. Simpl. sono amendue vere, ma molto diverse tra di loro. Qui si parla di un sol mobile mosso di un sol moto, ma composto di due, amendue equabili; e là si parla di due mobili mossi di moti naturalmente accelerati, uno per la perpendicolare A B, e l'altro per l'inclinata A C. In oltre i tempi quivi non si suppongono eguali, ma il tempo per l'inclinata A C è maggiore del tempo per la perpendicolare A B; ma nel moto, del quale si parla al presente, i moti per le A B, B C, A C, s'intendono equabili, e fatti nell'istesso tempo.

Simp. Mi scusino, e seguano avanti, che resto acquietato.

Salv. Seguita l'Autore per incamminarci a intender quel, che accaggia intor-

no all' impeto di un mobile, mosso pur di un moto composto di due, uno cioè orizzontale, ed equabile, e l' altro perpendicolare, ma naturalmente accelerato, dei quali finalmente è composto il moto del projetto, e si descrive la linea Parabolica; in ciaschedun punto della quale si cerca di determinare quanto sia l' impeto del Projetto: per la cui intelligenza ci dimostra l' Autore il modo, o vogliamo dir metodo di regolare, e misurar cotale impeto sopra l' istessa linea, nella quale si fa il moto del grave descendente con moto naturalmente accelerato partendosi dalla quiete: dicendo:

THEOR. III. PROP. III.

Fiat motus per lineam A B (Fig. v.) ex quiete in A, et accipiatur in ea quodlibet punctum C; et ponatur ipsamet A C esse tempus, seu temporis mensura casus ipsius per spatium A C, nec non mensura quoque impetus, seu momenti in puncto C ex descensu A C acquisiti. Modo sumatur in eadem linea A B quodcunque aliud punctum, ut puta B in quo determinandum est de impetu acquisito a mobili per descensum A B, in ratione ad impetum, quem obtinuit in C, cujus mensura posita est A C. Ponatur A S, media proportionalis in-

ter B A, A C. Demonstrabimus, impetum in B ad impetum in C esse ut lineam S A ad A C. Sumantur horizontales C D, dupla ipsius A C; B E vero dupla B A. Constat ex demonstratis, cadens per A C conversum in horizonte C D, atque juxta impetum in C acquisitum motu æquabili delatum conficere spatium C D æquali tempore, atque ipsum A C motu accelerato confecit; similiterque B E confici eodem tempore atque A B. Sed tempus ipsius descensus A B est A S; ergo horizontalis B E conficitur tempore A S. Fiat ut tempus S A ad tempus A C, ita E B ad B L. Cumque motus per B E sit æquabilis, erit spatium B L peractum tempore A C secundum momentum celeritatis in B. Sed tempore eodem A C conficitur spatium C D secundum momentum celeritatis in C: momenta autem celeritatis sunt inter se ut spatia, quæ juxta ipsa momenta eodem conficiuntur tempore: ergo momentum celeritatis in C ad momentum celeritatis in B, est ut D C ad B L. Quia vero ut D C ad B E, ita ipsarum dimidia, nempe C A ad A B; ut autem E B ad B L, ita B A ad A S: ergo ex æquali, ut C D ad B L, ita C A ad A S, hoc est, ut momentum celeritatis in C ad momentum celeritatis in B, ita C A ad A S; hoc est, tempus per C A ad tempus per A B. Patet itaque ratio mensurandi impetum, seu celeritatis momentum super linea, in qua

sit motus descensus; qui quidem impetus ponitur augeri pro ratione temporis.

Hic autem, antequam ulterius progrediamur, præmonendum est, quod cum de motu composito ex æquabili horizontali, et ex naturaliter accelerato deorsum futurus sit sermo, (ex tali enim mixtione conflatur, ac designatur linea projecti, nempe Parabola;) necesse habemus definire aliquam communem mensuram, juxta quam utriusque motus velocitatem, impetum, seu momentum dimetiri valeamus. Cumque lationis æquabilis innumeri sint velocitatis gradus, quorum non quilibet fortuito, sed unus ex illis innumeris cum gradu celeritatis per motum naturaliter acceleratum acquisito sit conferendus, et conjungendus; nullam faciliorem viam excogitare potui pro eo eligendo, atque determinando, quam alium ejusdem generis assumendo. Ut autem clarius me explicem; intelligatur perpendicularis A C (Fig. vi.) ad horizontalem C B: A C vero esse altitudinem: C B autem amplitudinem Semiparabolæ A B; quæ describitur a compositione duarum lationum; quarum una est mobilis descendentis per A C motu naturaliter accelerato ex quiete in A; altera est motus transversalis æquabilis juxta horizontalem A D. Impetus acquisitus in C per descensum A C determinatur a quantitate ejusdem altitudinis A C, unus enim atque idem est semper impetus mobilis ex eadem altitudine

cadentis: verum in horizontali non unus, sed innumeri assignari possunt gradus velocitatis motuum æquabilium; ex quorum multitudine, ut illum quem elegero a reliquis segregare, et quasi digito monstrare possim, altitudinem C A in sublimi extendam, in qua, prout opus fuerit, sublimitatem A E firmabo, ex qua si cadens ex quiete in E mente concipiam, patet, impetum ejus in termino A acquisitum unum esse, cum quo idem mobile, per horizontalem A D conversum, ferri concepero; ejusque gradum celeritatis esse illum, quo in tempore descensus per E A spatium in horizontali duplum ipsius E A conficiet. Hæc præmonere necessarium visum est.

Advertatur insuper, semiparabolæ A B amplitudinem a me vocari horizontalem C B;

Altitudinem, A C nempe, ejusdem Parabolæ axem.

Lineam vero E A, ex cujus descensu determinatur impetus horizontalis, sublimitatem appello.

His declaratis, ac definitis, ad demonstrandum me confero.

Sagr. Fermate in grazia, perchè qui mi par, che convenga adornar questo pensiero dell' Autore colla conformità del concetto di Platone intorno al determinare le diverse velocità dei moti equabili delle conversioni dei moti celesti; il quale avendo per avventura avuto concetto, non potere

alcun mobile passare dalla quiete ad alcun determinato grado di velocità, nel quale ei debba poi equabilmente perpetuarsi, se non col passare per tutti gli altri gradi di velocità minori, o vogliam dire di tardità maggiori, che tra l'assegnato grado, e l'altissimo di tardità, cioè della quiete, intercedono, disse, che Iddio dopo aver creati i corpi mobili celesti per assegnar loro quelle velocità, colle quali poi dovessero con moto circolare equabile perpetuamente muoversi, gli fece, partendosi loro dalla quiete, muover per determinati spazj di quel moto naturale, e per linea retta, secondo il quale noi sensatamente vediamo i nostri mobili muoversi dallo stato di quiete accelerandosi successivamente. E soggiugne, che avendogli fatto guadagnar quel grado, nel quale gli piacque, che poi dovessero mantenersi perpetuamente, convertì il moto loro retto in circolare; il quale solo è atto a conservarsi equabile, rigirandosi sempre senza allontanarsi, o avvicinarsi a qualche prefisso termine da essi desiderato. Il concetto è veramente degno di Platone; ed è tanto più da stimarsi, quanto i fondamenti taciuti da quello, e scoperti dal nostro Autore col levargli la maschera, o sembianza poetica lo scuoprono in aspetto di verace istoria. E mi pare assai credibile, che avendo noi per le dottrine Astronomiche assai competente notizia delle grandezze degli orbi, e dei Pianeti, e delle

distanze loro dal centro, intorno al quale si raggirano, come ancora delle loro velocità, possa il nostro Autore (al quale il concetto Platonico non era ascosto) aver talvolta per sua curiosità avuto pensiero di andare investigando, se si potesse assegnare una determinata sublimità, dalla quale partendosi, come da stato di quiete, i corpi dei Pianeti, e mossisi per certi spazj di moto retto, e naturalmente accelerato, convertendo poi la velocità acquistata in moti equabili, si trovassero corrispondere alle grandezze degli orbi loro, e ai tempi delle loro revoluzioni.

Salv. Mi par sovvenire, che egli già mi dicesse aver una volta fatto il computo, ed anco trovatolo assai acconciamente rispondere alle osservazioni; ma non averne voluto parlare, giudicando, che le troppe novità da lui scoperte, che lo sdegno di molti gli hanno provocato, non accendessero nuove scintille. Ma se alcuno averà simil desiderio, potrà per se stesso colla dottrina del presente trattato soddisfare al suo gusto. Ma seguitiamo la nostra materia; che è di dimostrare,

PROBL. I. PROP. IV.

Quomodo in datae Parabolae a Projecto descriptae punctis singulis impetus sit determinandus.

Sit Semiparabola B E C (Fig. VII.), cujus amplitudo C D, altitudo D B, quae extensa in sublimi occurrat tangenti Parabolam C A in A, et per verticem B sit horizonti, et C D parallela B I. Quod si amplitudo C D sit æqualis toti alitudini D A, erit B I æqualis B A, et B D. Et si temporis casus per A B, et momenti velocitatis acquisiti in B per descensum A B ex quiete in A, ponamus mensuram esse ipsammet A B; erit D C (dupla nempe B I) spatium, quod per impetum A B, per horizontalem conversum conficiet eodem tempore. Sed eodem tempore cadens per B D, ex quiete in B, conficit altitudinem B D, ergo mobile cadens ex quiete in A, per A B conversum cum impetu A B, per horizontalem conficit spatium æquale D C. Superveniente vero casu per B D, conficit altitudinem B D; et Parabola B C designatur: cujus impetus in termino C est compositus ex æquabili transversali; cujus momentum est ut A B, et ex altero momento acquisito in descensu B D in termino D seu C; quæ momenta æqualia sunt. Si ergo intel-

ligamus, A B alterius illorum esse mensuram, ut puta transversalis æquabilis: B I vero, quæ ipsi B D est æqualis, esse mensuram impetus acquisiti in D seu C: subtensa I A erit quantitas momenti compositi ex ambobus: erit ergo quantitas, seu mensura integri momenti, quo projectum veniens per Parabolam B C impetum facit in C. His retentis, accipiatur in Parabola quodlibet punctum E, in quo de impetu Projecti determinandum sit. Ducatur horizontalis E F: et accipiatur B G media proportionalis inter B D, B F. Cumque posita sit A B seu B D esse mensura temporis, et momenti velocitatis in casu B D ex quiete in B; erit B G tempus, seu mensura temporis, et impetus in F, venientis ex B. Si igitur ponatur B O æqualis B G; juncta diagonalis A O erit quantitas impetus in puncto E; est enim A B determinatrix posita temporis, et impetus in B, qui conversus in horizontali, semper servatur idem: B O vero determinat impetum in F seu E per descensum ex quiete in B, in altitudine B F, his autem A B, B O potentia æquipollet A O. Patet ergo, quod quærebatur.

Sagr. La contemplazione del componimento di questi impeti diversi, e della quantità di quell' impeto, che da tal mistione risulta, mi giugne tanto nuova, che mi lascia la mente in non piccola confusione. Non dico della mistione di due movimenti equa-

bili, benchè tra di loro diseguali, fatti uno per la linea orizzontale, e l' altro per la perpendicolare, che di questi resto capacissimo farsi un moto in potenza eguale ad amendue i componenti, ma mi nasce confusione nel mescolamento dell' orizzontale equabile, e perpendicolare naturalmente accelerato. Però vorrei che insieme digerissimo meglio questa materia.

Simp. Ed io tanto più ne son bisognoso, quanto che non sono ancor totalmente quietato di mente, come bisogna nelle proposizioni, che sono come primi fondamenti dell' altre, che gli seguono appresso. Voglio inferire, che anco nella mistione dei due moti equabili orizzontale, e perpendicolare vorrei meglio intendere quella potenza del lor composto. Ora, Sig. Salv. V. S. intende il nostro bisogno, e desiderio.

Salv. Il desiderio è molto ragionevole, e tenterò, se l' avere io più lungo tempo potuto pensarvi sopra, può agevolare la vostra intelligenza. Ma converrà comportarmi, e scusarmi, se nel discorrere anderò replicando buona parte delle cose sin qui poste dall'Autore.

Discorrer determinatamente circa i movimenti, e lor velocità, o impeti, siano quelli o equabili, o naturalmente accelerati, non possiamo noi senza prima determinar della misura, che usar vogliamo per misurar tali velocità, come anco della misura del tempo. Quanto alla misura del tempo,

già abbiamo la comunemente ricevuta per tutto delle ore, minuti primi, e secondi, ec. e come per misura del tempo ci è la detta comune ricevuta da tutti, così bisogna assegnarne una per le velocità, che appresso tutti sia comunemente intesa, e ricevuta; cioè, che appresso tutti sia l'istessa. Atta per tale uso ha stimato l'Autore, come si è dichiarato, esser la velocità dei gravi naturalmente descendenti, dei quali le crescenti velocità in tutte le parti del mondo serbano l'istesso tenore. Sicchè quel grado di velocità, che (per esempio) acquista una palla di piombo di una libbra nell'esser partendosi dalla quiete scesa perpendicolarmente quanto è l'altezza di una picca, è sempre, e in tutti i luoghi il medesimo, e per ciò accomodatissimo per esplicar la quantità dell'impeto derivante dalla scesa naturale. Resta poi il trovar modo di determinare anco la quantità dell'impeto in un moto equabile in guisa tale, che tutti coloro, che circa di quello discorrono, si formino l'istesso concettto della grandezza, e velocità sua; sicchè uno non se lo figuri più veloce, e un altro meno; onde poi nel congiugnere, e mescolar questo da se concepito equabile collo statuito moto accelerato, da diversi uomini ne vengano formati diversi concetti di diverse grandezze d'impeti. Per determinare, e rappresentare cotal impeto, e velocità particolare, non ha trovato il nostro Autore altro mezzo più acco-

modato, che il servirsi dell' impeto, che va acquistando il mobile nel moto naturalmente accelerato, del quale qualsivoglia momento acquistato, convertito in moto equabile ritien la sua velocità limitata precisamente, e tanta, che in altrettanto tempo quanto fu quello della scesa, passa doppio spazio dell' altezza, dalla quale è caduto. Ma perchè questo è punto principale nella materia, che si tratta, è bene con qualche esempio particolare farsi perfettamente intendere. Ripigliando dunque la velocità, e l' impeto acquistato dal grave cadente, come dicemmo, dall' altezza di una picca, della quale velocità vogliamo servirci per misura di altre velocità, ed impediti in altre occasioni, e posto per esempio, che il tempo di tal caduta sia 4 minuti secondi di ora, per ritrovar da questa tal misura, quanto fusse l'impeto del cadente da qualsivoglia altra altezza maggiore, o minore, non doviamo dalla proporzione, la quale quest' altra altezza avesse coll' altezza di una picca argomentare, o concludere la quantità dell' impeto acquistato in questa seconda altezza: stimando, per esempio, che il cadente da quadrupla altezza avesse acquistato quadrupla velocità; perchè ciò è falso: imperocchè non cresce, o cala la velocità nel moto naturalmente accelerato secondo la proporzione degli spazj, ma ben secondo quella dei tempi, della quale quella degli spazj è maggiore in duplicata proporzione,

come già fu dimostrato. Però quando noi avessimo in una linea retta assegnatane una parte per misura della velocità, ed anco del tempo, e dello spazio in tal tempo passato (che per brevità tutte tre queste grandezze con un'istessa linea spesse volte vengono rappresentate) per trovar la quantità del tempo, e il grado di velocità, che il mobile medesimo in altra distanza averebbe acquistato, ciò otterremo noi, non immediatamente da questa seconda distanza, ma dalla linea, che tra le due distanze sarà media proporzionale. Ma con un esempio meglio mi dichiaro. Nella linea A C (Fig. VIII.) perpendicolare all' orizzonte intendasi la parte A B essere uno spazio passato da un grave naturalmente descendente di moto accelerato: il tempo del qual passaggio, potendo io rappresentarlo con qualsivoglia linea, voglio per brevità figurarlo esser quanto la medesima linea A B, e parimente per misura dell' impeto, e velocità acquistata per tal moto pongo pur l' istessa linea A B, sicchè di tutti gli spazj, che nel progresso del discorso si hanno a considerare, la misura sia la parte A B. Stabilite ad arbitrio nostro sotto una sola grandezza A B queste 3 misure di generi di quantità diversissimi, cioè di spazj, di tempi, e di impeti, siaci proposto di dover determinare nell' assegnato spazio, e altezza A C, quanto sia per essere il tempo della scesa del cadente dall' A in C, e quanto l' im-

peto, che in esso termine C si troverà avere acquistata, in relazione al tempo, ed all'impeto misurati per la A B. L'uno, e l'altro quesito si determinerà pigliando delle due linee A C, A B la media proporzionale A D, affermando il tempo della caduta per tutto lo spazio A C esser quanto il tempo A D, in relazione al tempo A B, posto da principio per la quantità del tempo nella scesa A B. Diremo parimente l'impeto, o grado di velocità, che otterrà il cadente nel termine C, in relazione all'impeto, che ebbe in B, esser quale la medesima linea A D, in relazione all' A B, essendochè la velocità cresce colla medesima proporzione, che cresce il tempo: la qual conclusione, sebben fu presa come postulato, pur tuttavia volse l'Autore esplicarne l'applicazione di sopra alla proposizion terza.

Ben compreso, e stabilito questo punto, venghiamo alla considerazione dell' impeto derivante da due moti composti; uno dei quali sia composto dell' orizzontale e sempre equabile, e del perpendicolare all' orizzonte, e esso ancora equabile. Ma l'altro sia composto dell' orizzontale pur sempre equabile, e del perpendicolare naturalmente accelerato. Se amendue saranno equabili, già si è visto come l'impeto resultante dalla composizione di amendue è in potenza eguale ad amendue, come per chiara intelligenza esemplificheremo così. Intendasi il mobile descendente per la perpendicolare A B (Fig. IV.)

aver per esempio 3 gradi d'impeto equabile, ma trasportato per la A B verso C, esser tal velocità, ed impeto di 4 gradi, sicchè nel tempo medesimo, che scendendo passerebbe nella perpendicolare v. g. 3 braccia, nella orizzontale ne passerebbe 4; ma nel composto di amendue le velocità viene nel medesimo tempo dal punto A, nel termine C, camminando sempre per la diagonale A C, la quale non è lunga 7, quanto sarebbe la composta delle due A B 3, e B C 4, ma è 5, la qual 5 è in potenza eguale alle due 3, e 4. Imperocchè fatti li quadrati del 3, e del 4, che sono 9, e 16, e questi congiunti insieme, fanno 25 per lo quadrato di A C, il quale alli due quadrati di A B, e di B C è eguale, onde la A C sarà quanto è il lato, o o vogliam dir, la radice del quadrato 25, che è 5. Per regola dunque ferma, e sicura, quando si debba assegnare la quantità dell'impeto resultante da 2 impeti dati, uno orizzontale, e l'altro perpendicolare, ed amendue equabili, si deve di amendue fare 3 quadrati, e componendogli insieme estrar la radice del composto, la quale ci darà la quantità dell'impeto composto di amendue quelli. E così nell'esempio posto, quel mobile che in virtù del moto perpendicolare averebbe percosso sopra l'orizzonte con 3 gradi di forza; e col moto solo orizzontale averebbe percosso in C con gradi 4, percotendo con amendue gl'impe-

ti congiunti, il colpo sarà come quello del percuziente mosso con gradi 5 di velocità, e di forza. E questa tal percossa sarebbe del medesimo valore in tutti i punti della diagonale A C, per esser sempre gl' impeti composti i medesimi non mai cresciuti, o diminuiti.

Vediamo ora quello, che accada nel comporre il moto orizzontale equabile con un moto perpendicolare all' orizzonte, il quale cominciando dalla quiete vada naturalmente accelerandosi. Già è manifesto, che la diagonale, che è la linea del moto composto di questi due, non è una linea retta, ma semiparabolica, come si è dimostrato; nella quale l' impeto va sempre crescendo, mercè del continuo crescimento della velocità del moto perpendicolare. Laonde per determinar qual sia l' impeto in un assegnato punto di essa diagonale parabolica, prima bisogna assegnar la quantità dell' impeto uniforme orizzontale, e poi investigar qual sia l' impeto del cadente nell' assegnato punto: il che non si può determinare senza la considerazione del tempo decorso dal principio della composizione dei due moti: la qual considerazione di tempo non si richiede nella composizione dei moti equabili, le velocità, ed impeti dei quali son sempre i medesimi: ma qui dove entra nella mistione un moto, che cominciando dalla somma tardità, va crescendo la velocità conforme alla continuazion del tempo, è necessario, che la quantità del tempo ci

manifesti la quantità del grado di velocità nell' assegnato punto: che quanto al resto poi l'impeto composto di questi due è (come nei moti uniformi) eguale in potenza ad amendue i componenti. Ma qui ancora meglio mi dichiaro con un esempio. Sia nella perpendicolare all' orizzonte A C (Fig. IX.) presa qualsivoglia parte A B la quale figuro, che serva per misura dello spazio del moto naturale fatto in essa perpendicolare, e parimente sia misura del tempo, ed anco del grado di velocità, o vogliam dire degl' impeti. È primieramente manifesto, che se l'impeto del cadente in B dalla quiete in A, si convertirà sopra la B D parallela all' orizzonte in moto equabile, la quantità della sua velocità sarà tanta, che nel tempo A B passerà uno spazio doppio dello spazio A B; e tanta sia la linea B D. Posta poi la B C eguale alla B A, e tirata la parallela C E alla B D, e ad essa eguale, descriveremo per i punti B, E la linea parabolica B E I. E perchè nel tempo A B coll' impeto A B si passa l'orizzontale B D, o C E, doppia della A B, e passasi ancora in altro tanto tempo la perpendicolare B C con acquisto d' impeto in C eguale al medesimo orizzontale, adunque il mobile in tanto tempo quanto è A B, si troverà dal B giunto in E per la parabola B E, con un impeto composto di due, ciascheduno eguale all' impeto A B. E perchè l'uno di essi è orizzontale, e

l' altro perpendicolare, l' impeto composto di essi sarà in potenza eguale ad amendue, cioè doppio di uno. Onde posta la B F eguale alla B A; e tirata la diagonale A F, l' impeto, e la percossa in E; sarà maggior della percossa in B della cadente dall' altezza A, ovvero della percossa dell' impeto orizzontale per la B D, secondo la proporzione di A F ad A B. Ma quando, ritenendo pur sempre la B A, per misura dello spazio della caduta dalla quiete in A sino in B, e per misura del tempo, e dell' impeto del cadente acquistato in B l' altezza B O non fusse eguale, ma maggiore della A B; presa la B G media proporzionale tra esse A B, B O, sarebbe essa B G misura del tempo, e dell' impeto in O per la caduta dell' altezza B O, acquistato in O; e lo spazio per l' orizzontale, il quale passato coll' impeto A B nel tempo A B, sarebbe doppio della A B, sarà in tutta la durazion del tempo B G tanto maggiore, quanto a proporzione la B G è maggiore della B A. Posta dunque la L B eguale alla B G, e tirata la diagonale A L, averemo da essa la quantità composta delli due impeti orizzontale, e perpendicolare, dai quali si descrive la Parabola: dei quali l' orizzontale ed equabile è l' acquistato in B per la caduta A B; e l' altro è l' acquistato in O, o vogliam dire in I, per la caduta B O, il cui tempo fu B G, come anco la quantità del suo momento. E con

simil discorso investigheremo l' impeto nel termine estremo della parabola, quando l' altezza sua fusse minore della sublimità A B prendendo tra amendue la media: la quale posta nell' orizzontale in luogo della B F, e congiunta la diagonale, come A F, averemo da questa la quantità dell' impeto nell' estremo termine della parabola.

A quanto sin qui si è considerato circa questi impeti, colpi, o vogliam dir percosse di tali projetti, convien aggiungnere un' altra molto necessaria considerazione, e questa è, che non basta por mente alla sola velocità del projetto per ben determinare della forza, ed energia della percossa, ma convien chiamare a parte ancora lo stato, e condizione di quello, che riceve la percossa; nell' efficacia della quale esso per più rispetti ha gran participazione, e interesse. E prima non è chi non intenda, che la cosa percossa intanto patisce violenza dalla velocità del percuziente, in quanto ella se gli oppone, e frena in tutto, o in parte il moto di quello: che se il colpo arriverà sopra tale, che ceda alla velocità del percuziente senza resistenza alcuna, tal colpo sarà nullo. E colui, che corre per ferir con lancia il suo nimico, se nel sopraggiugnerlo accaderà, che quello si muova fuggendo con pari velocità, non farà colpo, e l' azione sarà un semplice toccare senza offendere.

Ma se la percossa verrà ricevuta in un oggetto, che non in tutto ceda al percuziente, ma solamente in parte, la percossa danneggerà, ma non con tutto l'impeto, ma solo coll'eccesso della velocità di esso percuziente sopra la velocità della ritirata, e cedenza del percosso: sicchè, se v. gr. il percoziente, arriverà con 10 gradi di velocità sopra il percosso, il quale cedendo in parte si ritiri con gradi 4, l'impeto, e percossa sarà come di gradi 6. E finalmente intera, e massima sarà la percossa, per la parte del percoziente, quando il percosse nulla ceda, ma interamente si opponga, e fermi tutto il moto del percoziente; se però questo può accadere. Ed ho detto per la parte del percoziente, perchè quando il percosso si movesse con moto contrario verso il percoziente, il colpo, e l'incontro si farebbe tanto più gagliardo, quanto le due velocità contrarie unite son maggiori, che la sola del percoziente. Di più conviene anco avvertire, che il ceder più, o meno, può derivare non solamente dalla qualità della materia più o men dura, come se sia di ferro, di piombo, o di lana, ec. ma dalla positura del corpo, che riceve la percossa: la qual positura se sarà tale, che il moto del percoziente la vada a investire ad angoli retti, l'impeto del colpo sarà il massimo: ma se il moto verrà obliquamente, e come diciam noi, a scancio, il colpo sarà più debole, e più e

più secondo la maggiore obliquità; perchè in oggetto in tal modo situato, ancorchè di materia sedissima, non si spegne, e ferma tutto l'impeto, e moto del percoziente, il quale sfuggendo passa oltre, continuando almeno in qualche parte a muoversi sopra la superficie del resistente opposto. Quando dunque si è di sopra determinato della grandezza dell' impeto del projetto nell' estremità della linea parabolica, si deve intendere della percossa ricevuta sopra una linea ad angoli retti ad essa parabolica, ovvero alla tangente la parabola nel detto punto: perchè sebben quel moto è composto di un orizzontale, e di un perpendicolare, l'impeto nè sopra l' orizzontale nè sopra il piano eretto all' orizzonte è il massimo, venendo sopra amendue ricevuto obliquamente.

Sagr. Il ricordar V. S. questi colpi, e queste percosse mi ha risvegliato nella mente un problema, o vogliam dire questione meccanica, della quale non ho trovato appresso autore alcuno la soluzione, nè cosa, che mi scemi la maraviglia, o almeno in parte mi quieti l'intelletto. E il dubbio, e lo stupor mio consiste nel non restar capace onde possa derivare, e da qual principio possa dependere l' energia, e la forza immensa, che si vede consistere nella percossa, mentre col semplice colpo di un martello, che non abbia peso maggiore di 8 o 10, libbre, veggiamo su-

perarsi resistenze tali, le quali non cederanno al peso di un grave, che senza percossa vi faccia impeto solamente calcando, e premendo, benchè la gravità di quello passi molte centinaja di libbre. Io vorrei pur trovar modo di misurar la forza di questa percossa, la quale non penso però, che sia infinita, anzi stimo, che ella abbia il suo termine da potersi pareggiare, e finalmente regolare con altre forze di gravità prementi, o di leve, o di viti, o di altri strumenti meccanici, dei quali io a soddisfazione resto capace della multiplicazione della forza loro.

Salv. V. S. non è solo nella maraviglia dell'effetto, e nella oscurità della cagione di così stupendo accidente. Io vi pensai per alcun tempo in vano, accrescendo sempre la confusione; sinchè finalmente, incontrandomi nel nostro Accademico, da esso ricevei doppia consolazione: prima nel sentire come egli ancora era stato lungo tempo nelle medesime tenebre, e poi nel dirmi, che dopo l'avervi in vita sua consumate molte migliara di ore specolando, e filosofando, ne aveva conseguite alcune cognizioni lontane dai nostri primi concetti, e però nuove, e per la novità ammirande. E perchè omai so, che la curiosità di V. S. volentieri sentirebbe quei pensieri, che si allontanano dall'opinabile, non aspetterò la sua richiesta, ma le do parola, che spedita che averemo la lettura di questo

trattato dei projetti, gli spiegherò tutte quelle fantasie, o vogliamo dire stravaganze, che dei discorsi dell' Accademico mi son rimaste nella memoria. In tanto seguitiamo le proposizioni dell' Autore.

PROPOS. V. PROBL. II.

In axe extenso datae Parabolae punctum sublime reperire, ex quo cadens parabolam ipsam describit.

Si Parabola A B (Fig. x.) cujus amplitudo H B, et axis extensus H C, in quo reperienda sit sublimitas, ex qua cadens, impetum in A conceptum in horizontalem convertens, parabolam A B describat. Ducetur horizontalis A G, quæ erit parallela ipsi B H, et posita A F æquali A H, ducatur recta F B, quæ parabolam tanget in B, et horizontalem A G in G secabit; accipiaturque ipsarum F A, A G tertia proportionalis A C. Dico C esse punctum sublime quæsitum, ex quo cadens ex quiete in C, et conceptum impetum in A in horizontalem convertens, superveniente impetu descensus in H ex quiete in A, parabolam A B describet. Si enim intelligamus, C A esse mensuram temporis descensus ex

C in A, nec non impetus acquisiti in A, erit A G (media nempe inter C A, A F) tempus, et impetus venientis ex F in A, seu ex A in H. Et quia veniens ex C tempore C A, cum impetu acquisito in A, conficit in latione horizontali motu æquabili duplam C A; ergo etiam latum eodem impetu conficiet in tempore A G duplam G A, mediam nempe B H; (spatia enim confecta eodem motu æquabili sunt inter se ut eorundem motuum tempora) et in perpendiculari motu ex quiete, eodem tempore G A conficitur A H; ergo eodem tempore conficiuntur a mobili amplitudo H B, et altitudo A H. Describitur ergo parabola A B ex casu venientis a sublimitate C. quod quærebatur.

COROLLARIUM.

Hinc constat dimidiam basim, seu amplitudinem semiparabolæ (quæ est quarta pars amplitudinis integræ parabolæ) esse mediam proportionalem inter altitudinem ejus, et sublimitatem, ex qua cadens eam designat.

PROPOS. VI. PROBL. III.

Data sublimitate, et altitudine, semiparabolae amplitudinem reperire.

Sit ad horizontalem lineam D C (Fig. XI.) perpendicularis A C, in qua data sit altitudo C B, et sublimitas B A, oportet in horizontali C D amplitudinem semiparabolæ reperire, quæ ex sublimitate B A cum altitudine B C designatur. Accipiatur media proportionalis inter C B, B A, cujus C D ponatur dupla. Dico C D esse amplitudinem quæsitam. Id autem ex præcedenti manifestum est.

THEOR. IV. PROPOS. VII.

In projectis, a quibus semiparabolae ejusdem amplitudinis describuntur, minor requiritur impetus in eo, quod describit illam, cujus amplitudo suae altitudinis est dupla, quam in quolibet alio.

Sit enim semiparabola B D (Fig. XII.), cujus amplitudo C D dupla sit altitudinis

suæ C B, et in axe in sublimi extenso ponatur B A altitudini B C æqualis: et jungatur A D, quæ semiparabolam tanget in D; et horizontalem B E secabit in E, eritque B E ipsi B C seu B A æqualis; constat, ipsam describi a projecto, cujus impetus æquabilis horizontalis sit, qualis est in B cadentis ex quiete in A, impetus vero naturalis deorsum, qualis est venientis in C ex quiete in B. Ex quo constat, impetum ex istis compositum, quique in termino D impingit, esse ut diagonalem A E, potentia nempe ipsis ambobus æqualem. Sit modo quælibet alia semiparabola G D; cujus amplitudo eadem C D, altitudo vero C G minor, vel major altitudine B C; eamque tangat H D, secans horizontalem per G ductam in puncto K; et fiat, ut H G ad G K, ita K G ad G L, erit ex ante demonstratis altitudo G L, ex qua cadens describet parabolam G D. Inter A B, et G L media proportionalis sit G M: erit G M tempus, et momentum, sive impetus in G cadentis ex L. (positum enim est, A B esse mensuram temporis, et impetus.) Sit rursus inter H C, C G, media G N, quæ erit temporis, impetus mensura cadentis ex G in C. Si igitur jungatur M N, erit ipsa impetus mensura projecti per parabolam B D, illidentis in termino D. Quem quidem impetum majorem esse dico impetu projecti per parabolam B D, cujus quantitas erat ut A E. Quia enim G N posita

est media inter B C, C G, est autem B C æqualis B E, hoc est G K (est enim unaquæque subdupla D C:) erit ut C G ad G N, ita N G ad G K, et ut C G seu H G ad G K, ita quadratum N G ad quadratum G K; ut autem H G ad G K, ita facta est K G ad G L. ergo ut quadratum N G ad quadratum G K, ita K G ad G L, sed ut K G ad G L, ita quadratum K G ad quadratum G M (media enim est G M inter K G, G L) ergo tria quadrata N G, K G, G M, sunt continue proportionalia: et duo extrema N G, G M, simul sumpta, idest, quadratum M N, majus quam duplum quadrati K G, cujus quadratum A E duplum est: ergo quadratum M N majus est quadrato A E; et linea M N major linea E A, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hinc apparet, quod conversim in projecto ex termino D per semiparabolam D B minor impetus requiritur, quam per quamcunque aliam juxta elevationem majorem, seu minorem elevatione semiparabolæ B D, quæ est juxta tangentem A D, angulum semirectum supra horizontem continentem. Quod cum ita sit, constat, quod, si cum eodem impetu fiant projectiones ex termino D, juxta diversas elevationes, maxima projectio, seu amplitudo semiparabo-

læ, sive integræ parabolæ erit, quæ consequitur ad elevationem anguli semirecti; reliquæ vero juxta majores, sive minores angulos factæ, minores erunt.

Sagr. Piena di maraviglia, e di diletto insieme è la forza delle dimostrazioni necessarie, quali sono le sole Matematiche. Già sapeva io per fede prestata alle relazioni di più Bombardieri, che di tutti i tiri di volata dell' artiglieria, o del mortaro, il massimo, cioè quello, che in maggior lontananza caccia la palla, era il fatto all' elevazione di mezzo angolo retto, che essi dicono, del sesto punto della squadra; ma l' intender la cagione, onde ciò avvenga, supera d' infinito intervallo la semplice notizia avuta dalle altrui attestazioni, ed anco da molte replicate esperienze.

Salv. V. S. molto veridicamente discorre: e la cognizione di un solo effetto acquistata per le sue cause ci apre l' intelletto a intendere, ed assicurarci di altri effetti, senza bisogno di ricorrere all' esperienze, come appunto avviene nel presente caso, dove guadagnata per lo discorso dimostrativo la certezza dell' essere il massimo di tutti i tiri di volata quello dell' elevazione dell' angolo semiretto, ci dimostra l' Autore quello, che forse per l' esperienza non è stato osservato; e questo è, che degli altri tiri, quelli sono tra di loro eguali, le elevazioni dei quali superano, o mancano per angoli eguali dalla semiretta: sicchè le pal-

le tirate dall' orizzonte una secondo l' elevazione di 7 punti, e l' altra di 5, andranno a ferir su l' orizzonte in lontananze eguali, e così eguali saranno i tiri di 8 e di 4 punti; di 9 e di 3 ec. Or sentiamone la dimostrazione.

THEOR. V. PROPOS. VIII.

Amplitudines parabolarum a projectis eodem impetu explosis factarum, juxta elevationes per angulos aequales supra, et infra a semirecto distantes, aequales sunt inter se.

Trianguli M C B (Fig. XIII.) circa angulum rectum C sint horizontalis B C, perpendicularis C M æquales; sic enim angulus M B C semirectus erit: et extensa C M in D, supra et infra diagonalem M B constituantur in B duo anguli æquales M B E, M B D. Demonstrandum est, amplitudines Parabolarum a Projectis explosis eodem impetu ex termino B, juxta elevationes angulorum E B C, D B C, esse æquales. Quia enim angulus externus B M C internis M D B, D B M est æqualis, iisdem æquabitur quoque angulus M B C. Quod si loco anguli D B M ponamus M B E, erit idem angulus M B C duobus

M B E, B D C æqualis: et dempto communi M B E, reliquus B D C reliquo E B C erit æqualis. Sunt igitur trianguli D C B, B C E similes. Dividantur rectæ D C, E C bifariam in H, et F; et ducantur H I, F G, horizontali C B æquidistantes; et ut D H ad H I, ita fiat I H ad H L: erit triangulus I H L similis triangulo I H D, cui etiam similis est E G F. Cumque I H, G F sint æquales (dimidiæ nempe ipsius B C) erit F E, idest F C, æqualis H L: et addita communi F H, erit C H ipsi F L æqualis. Si itaque intelligamus per H et B semiparabolam esse descriptam, cujus altitudo erit H C, sublimitas vero H L, erit amplitudo ejus C B; quæ dupla est ad H I, media scilicet inter D H seu C H, et H L; eamque tanget D B, æqualibus existentibus C H, H D. Quod si rursus parabolam per F B descriptam concipiamus, a sublimitate F L cum altitudine F C; quarum media proportionalis est F G; cujus dupla est horizontalis C B: erit pariter C B ejus amplitudo: illamque tanget E B, cum E F, F C sint æquales. Distant anguli D B C, E B C, (elevationes scilicet ipsarum) æqualiter a semirecto: ergo patet propositum.

THEOR. VI. PROPOS. IX.

Æquales sunt amplitudines Parabolarum; quarum altitudines, et sublimitates e contrario sibi respondent.

Parabolæ (Fig. XIV.) F H altitudo G F ad altitudinem C B parabolæ B D eandem habeat rationem quam sublimitas B A ad sublimitatem F E. Dico amplitudinem H G amplitudini D C esse æqualem. Cum enim prima G F ad secundam C B eandem habeat rationem, quam tertia B A ad quartam F E: rectangulum G F E primæ, et quartæ æquale erit rectangulo C B A secundæ, et tertiæ; ergo quadrata, quæ hisce rectangulis æqualia sunt, æqualia erunt inter se: rectangulo vero G F E æquale est quadratum. dimidiæ G H: rectangulo autem C B A æquale est quadratum dimidiæ C D. ergo quadrata hæc, et eorum latera, et laterum dupla, æqualia erunt. Hæc autem sunt amplitudines G H, C D. ergo patet propositum.

LEMMA PRO SEQUENTI.

Si recta linea secta fuerit utcumque, quadrata mediarum inter totam, et partes aequalia sunt quadrato totius.

Secta sit A B (Fig. xv.) utcunque in C. Dico, quadrata linearum mediarum inter totam A B, et partes A C, C B, simul sumpta, aequalia esse quadrato totius A B. Id autem constat descripto semicirculo super tota B A, et ex C erecta perpendiculari C D, junctisque D A, D B, Est enim D A media inter B A, A C, estque D B media inter A B, B C, suntque quadrata linearum D A, D B simul sumpta aequalia quadrato totius A B, recto existente angulo A D B in semicirculo; ergo patet propositum.

THEOR. VII. PROPOS. X.

Impetus, seu momentum cujuslibet semiparabolae aequatur momento naturaliter cadentis in perpendiculari ad horisontem, quae tanta sit, quanta est composita ex sublimitate cum altitudine semiparabolae.

Sit semiparabola A B (Fig. xvi.), cujus sublimitas D A, altitudo vero A C ex

quibus componitur perpendicularis D C. Dico, impetum semiparabolæ in B esse æqualem momento naturaliter descendentis ex D in C. Ponatur ipsamet D C mensura esse temporis, et impetus: et accipiatur media proportionalis inter C D, D A, cui æqualis ponatur C F. Sit insuper inter D C, C A media C E. erit jam C F mensura temporis, et momenti descendentis per D A ex quiete in D, C E vero tempus erit, et momentum descendentis per A C ex quiete in A, et diagonalis E F erit momentum ex illis compositum: hoc est semiparabolæ in B. Et quia D C secta est utcunque in A, suntque C F, C E mediæ inter totam C D, et partes D A, A C: erunt harum quadrata simul sumpta æqualia quadrato totius ex Lemmate superiori; verum iisdem quadratis æquatur quoque quadratum ipsius E F. ergo et linea E F ipsi D C æqualis est. Ex quo constat, momenta per D C, et per semiparabolam A B, in C, et B esse æqualia; quod oportebat.

COROLLARIUM.

Hinc constat, semiparabolarum omnium, quarum altitudines cum sublimitatibus junctæ pares sunt, impetus quoque æquales esse.

PROBL. II. PROPOS. XI.

Dato impetu, et amplitudine semiparabolae; altitudinem ejus reperire.

Impetus datus definitus sit a perpendiculo ad horizontem A B (Fig. XVII.); amplitudo vero in horizontali sit B C. Oportet sublimitatem semiparabolæ reperire, cujus impetus sit A B, amplitudo vero B C. Constat ex jam demonstratis, dimidiam amplitudinem B C futuram esse mediam proportionalem inter altitudinem, et sublimitatem ipsius semiparabolæ, cujus impetus ex præcedenti est idem cum impetu cadentis ex quiete in A per totam A B. Est propterea B A ita secanda, ut rectangulum a partibus ejus contentum æquale sit quadrato dimidiæ B C, quæ sit B D. Hinc apparet, necessarium esse, quod D B dimidiam B A non superet, rectangulorum enim a partibus contentorum maximum est, cum tota linea in partes secatur æquales. Dividatur itaque B A bifariam in E. Quod si ipsa B D æqualis fuerit B E, absolutum est opus: eritque semiparabolæ altitudo B E, sublimitas vero E A (et ecce Parabolæ elevationis semirectæ amplitudinem, ut supra demonstratum est, omnium

esse maximam ab eodem impetu descriptarum.) At minor sit B D quam dimidia B A, quæ ita secanda est, ut rectangulum sub partibus quadrato B D sit æquale. Supra E A semicirculus describatur, in quo ex A applicetur A F æqualis B D: et jungatur F E; cui secetur pars æqualis E G. Erit jam rectangulum B G A cum quadrato E G æquale quadrato E A. cui quoque æqualia sunt duo quadrata A F, F E. Demptis itaque quadratis G E, F E, æqualibus, remanet rectangulum B G A æquale quadrato A F, nempe B D; et linea B D media proportionalis inter B G. G A. Ex quo patet, semiparabolæ, cujus amplitudo B C, impetus vero A B, altitudinem esse B G, sublimitatem G A. Quod si ponatur inferius B I æqualis G A, erit hæc altitudo; I A vero sublimitas semiparabolæ I C. Ex demonstratis hucusque possumus.

PROBL. III. PROPOS. XII.

Semiparabolarum omnium amplitudines calculo colligere, atque in Tabulas exigere, quae a projectis eodem impetu explosis describuntur.

Constat ex prædemonstratis, tunc parabolas a projectis eodem impetu designa-

ri, cum illarum sublimitates cum altitudinibus junctæ æquales conficiunt perpendiculares supra horizontem. Inter easdem ergo parallelas horizontales hæ perpendiculares comprehendi debent. Ponatur itaque horizontali C B (Fig. XVIII.) perpendicularis B A æqualis, et connectatur diagonalis A C. Erit angulus A C B semirectus, gr. 45. Divisaque perpendiculari B A bifariam in D, semiparabola D C erit ea, quæ a sublimitate A D cum altitudine D B designatur: et impetus ejus in C tantus erit, quantus est in B mobilis venientis ex quiete in A per lineam A B. Et, si ducatur A G æquidistans B C; reliquarum omnium semiparabolarum, quarum impetus futurus sit idem cum modo explicato, altitudines cum sublimitatibus junctæ, spatium inter parallelas A G, B C explere debent. Insuper, cum jam demonstratum sit, semiparabolarum, quarum tangentes æqualiter sive supra, sive infra ab elevatione semirecta distant, amplitudines æquales esse, calculus, quem pro majoribus elevationibus compilabimus, pro minoribus quoque deserviet. Eligimus præterea numerum partium decem mille, 10000, pro maxima amplitudine projectionis semiparabolæ ad elevationem grad. 45. factæ: itaque tanta supponatur esse linea B A, et amplitudo semiparabolæ B C. Eligimus autem numerum 10000, quia utimur in calculis tabula tangentium, cujus hic numerus congruit

cum tangente grad. 45. Jam, ad opus accedendo, ducatur C E, angulum E C B angulo A C B majorem (acutum tamen) comprehendens; sitque semiparabola designanda, quæ a linea E C tangatur, et cujus sublimitas cum altitudine juncta ipsam B A adæquet. Ex tabula tangentium per angulum datum B C E tangens ipsa B E accipiatur; quæ bifariam dividatur in F. Deinde ipsarum B F, B I (dimidiæ B C) tertia proportionalis reperiatur, quæ necessario major erit quam F A. Sit igitur illa F O. Semiparabolæ igitur in triangulo E C B inscriptæ, juxta tangentem C E, cujus amplitudo est C B, reperta est altitudo B F, et sublimitas F O. Verum tota B O supra parallelas A G, C B attollitur, cum nobis opus sit inter easdem contineri: sic enim tum ipsa, tum semiparabolæ D C describentur a projectis ex C impetu eodem explosis. Reperienda igitur est altera huic similis (innumeræ enim intra angulum B C E majores, et minores inter se similes designari possunt) cujus composita sublimitas cum altitudine (homologa scilicet ipsi B A) æqnetur B A. Fiat igitur, ut O B ad B A, ita amplitudo B C ad C R, et inventa erit C R, amplitudo scilicet semiparabolæ juxta elevationem anguli B C E; cujus sublimitas cum altitudine juncta spatium a parallelis G A, C B contentum adæquat: quod quærebatur. Operatio itaque talis erit.

Anguli dati B C E tangens accipiatur; cujus medietati adjungatur tertia proportionalis ipsius, et medietatis B C, quæ sit F O. Fiat deinde ut O B ad B A, ita B C ad aliam, quæ sit C R, amplitudo nempe quæsita. Exemplum ponamus.

Sit angulus E C B grad. 50, erit ejus tangens 11918, cujus dimidium, nempe B F 5959, dimidia B C 5000, harum dimidiarum tertia proportionalis 4195. quæ addita ipsi B F conficit 10154 pro ipsa B O. Fiat rursus ut O B ad B A, nempe ut 10154 ad 10000, ita B C, nempe 10000. (utraque enim grad. 45. est tangens) ad aliam, et habebimus quæsitam amplitudinem R C, 9848. qualium B C (maxima amplitudo) est 10000. Harum autem duplæ sunt amplitudines integrarum parabolarum, nempe 19696, et 20000. Tantaque est etiam amplitudo parabolæ juxta elevationem grad. 40. cum æqualiter distet a grad. 45.

Sagr. Mi manca per l'intiera intelligenza di questa dimostrazione il saper come sia vero, che la terza proporzionale delle B F, B I sia (come dice l' Autore) necessariamente maggiore della F A.

Salv. Tal conseguenza mi par che si possa dedurre in tal modo. Il quadrato della media di tre linee proporzionali è eguale al rettangolo dell' altre due, onde il quadrato della B I, o della B D ad essa eguale, dee esser' eguale al rettangolo della prima F B nella terza da ritrovarsi;

la qual terza è necessario, che sia maggiore della F A, perchè il rettangolo della B F in F A è minore del quadrato B D; ed il mancamento è quanto il quadrato della D F, come dimostra Euclide in una del secondo. Debbesi anco avvertire, che il punto F, che divide la tangente E B in mezzo, altre molte volte cadrà sopra il punto A, ed una volta anco nell' istesso A; nei quali casi è per se noto, che la terza proporzionale della metà della tangente, e della B I (che dà la sublimità,) è tutta sopra la A. Ma l'Autore ha preso il caso, dove non era manifesto, che la detta terza proporzionale fusse sempre maggiore della F A; e che però aggiunta sopra il punto F passasse la parallela A G. Or seguitiamo.

Non erit inutile ope hujus Tabulæ alteram componere complectentem altitudines earundem semiparabolarum projectorum ab eodem impetu. Constructio autem talis erit.

PROBL. IV. PROP. XIII.

Ex datis Semiparabolarum amplitudinibus in sequenti Tabula digestis, retentoque communi impetu, quo unaquaeque describitur, singularum semiparabolarum altitudines eligere.

Sit Amplitudo data B C (Fig. XXI.). Impetus vero, qui semper idem intelligatur,

mensura sit A B, aggregatum nempe altitudinis, et sublimitatis. Reperienda est, ac distinguenda ipsamet altitudo. Quod quidem tunc consequemur, cum B A ita divisa fuerit, ut rectangulum sub ejus partibus contentum æquale sit quadrato dimidiæ amplitudinis B C. Incidat talis divisio in F. Et utraque A B, B C secetur bifariam in D, I. Est igitur quadratum I B æquale rectangulo B F A: quadratum vero D A æquatur eidem rectangulo cum quadrato F D. Si igitur ex quadrato D A auferatur quadratum B I, quod rectangulo B F A est æquale, remanebit quadratum F D, cujus latus D F additum lineæ B D dabit quæsitam altitudinem B F. Componitur itaque sic ex datis. Ex quadrato dimidiæ B A notæ aufer quadratum B I pariter notæ: residui sume radicem quadratam, quam adde notæ B D, et habebis altitudinem quæsitam B F. Exemplum. Invenienda sit altitudo semiparabolæ ad elevationem grad. 55 descriptæ. Amplitudo ex præcedenti Tabula est 9396. ejus dimidium est 4698, quadratum ipsius 22071204; hoc dempto ex quadrato dimidiæ B A, quod semper idem est, nempe 25000000, residuum est 2928796, cujus radix quadrata 1710 proxime. Hæc dimidiæ B A, nempe 5000 addita exhibet 6710, tantaque est altitudo B F. Non erit inutile, tertiam exponere Tabulam, altitudines, et sublimitates conti-

nentem semiparabolarum, quarum eadem futura sit amplitudo.

Sagr. Questa vedrò io molto volentieri, mentrechè per essa potrò venir in cognizione della differenza degl'impeti, e delle forze, che si ricercano per cacciare il projetto nella medesima lontananza con tiri, che chiamano di volata; la qual differenza credo, che sia grandissima secondo le diverse elevazioni: sicchè per esempio, se altri volesse alla elevazione di 3, o 4 gradi, o di 87, o 88 far cader la palla, dove fu cacciata alla elevazione di 45. (dove si è mostrato ricercarsi l'impeto minimo) credo si ricercherebbe un eccesso immenso di forza.

Salv. V. S. stima benissimo, e vedrà che per esequire l'opera intera in tutte l'elevazioni bisogna andare a gran passo verso l'impeto infinito. Or vediamo la costruzione della Tavola.

Altitudines semiparobolarum, quarum impetus sit idem.

Gradus Elevationum.

gr.		gr.	
1	3	46	5173
2	13	47	5346
3	28	48	5523
4	50	49	5698
5	76	50	5868
6	108	51	6038
7	150	52	6207
8	194	53	6379
9	245	54	6546
10	302	55	6710
11	365	56	6873
12	432	57	7033
13	506	58	7190
14	585	59	7348
15	670	60	7502
16	760	61	7649
17	855	62	7796
18	955	63	7939
19	1060	64	8078
20	1170	65	8214
21	1285	66	8346
22	1402	67	8474
23	1527	68	8497
24	1685	69	8715
25	1786	70	8830
26	1922	71	8940
27	2061	72	9045

Amplitudines semiparabolarum ab eodem impetu descriptarum.

Gradus Elevationum.

gr.		gr.
45	10000	
46	9994	44
47	9976	43
48	9945	42
49	9902	41
50	9848	40
51	9782	39
52	9704	38
53	9612	37
54	9511	36
55	9396	35
56	9272	34
57	9136	33
58	8989	32
59	8829	31
60	8659	30
61	8481	29
62	8290	28
63	8090	27
64	7880	26
65	7660	25
66	7431	24
67	7191	23
68	6944	22
69	6692	21
70	6428	20
71	6157	19

gr.		gr.	
28	2204	73	9144
29	2351	74	9240
30	2499	75	9330
31	2653	76	9415
32	2810	77	9493
33	2967	78	9567
34	3128	79	9636
35	3289	80	9698
36	3456	81	9755
37	3621	82	9806
38	3793	83	9851
39	3962	84	9890
40	4132	85	9924
41	4302	86	9951
42	4477	87	9972
43	4654	88	9987
44	4827	89	9998
45	5000	90	10000

gr.		gr.
72	5878	18
73	5592	17
74	5300	16
75	5000	15
76	4694	14
77	4383	13
78	4067	12
79	3746	11
80	3420	10
81	3090	9
82	2756	8
83	2419	7
84	2079	6
85	1736	5
86	1391	4
87	1044	3
88	698	2
89	349	1

Tabula continens altitudines, et sublimitates semiparabolarum, quarum amplitudines eaedem sint, partium scilicet 10000. ad singulos gradus elevationis calculata.

gr.	alt.	subl.	gr.	alt.	subl.
1	87	286533	28	3008	9404
2	175	142450	29	3124	9020
3	262	95802	30	3247	8659
4	349	71531	31	3372	8336
5	437	57142	32	3500	8002
6	525	47573	33	3638	7699
7	614	40716	34	3768	7413
8	702	35587	35	3906	7141
9	792	31565	36	4048	6282
10	881	28356	37	4196	6635
11	972	25720	38	4346	6395
12	1062	23518	39	4502	6174
13	1154	21701	40	4662	5959
14	1246	20056	41	4828	5752
15	1339	18660	42	5000	5553
16	1434	17405	43	2658	5362
17	1528	16355	44	2772	5177
18	1624	15388	45	2887	5000
19	1722	14522	46	5177	4828
20	1820	13736	47	5362	4662
21	1919	13025	48	5553	4502
22	2020	12376	49	5752	4346
23	2122	11778	50	5959	4196
24	2226	11230	51	6174	4048
25	2332	10722	52	6395	3906
26	2438	18253	53	6635	3768
27	2547	9814	54	6882	3632

gr.	alt.	subl.	gr.	alt.	subl.
55	7141	3500	73	16355	1528
56	7413	3372	74	17405	1434
57	7699	3247	75	18660	1339
58	8002	3124	76	20056	1246
59	8336	3008	77	21701	1154
60	8659	2887	78	23518	1062
61	9020	2772	79	25720	972
62	9404	2658	80	28356	881
63	9814	2547	81	31565	792
64	10253	2438	82	35573	702
65	10722	2332	83	40716	614
66	11230	2226	84	47573	525
67	11878	2122	85	57142	437
68	12376	2020	86	71531	349
69	13025	1919	87	95802	262
70	13736	1820	88	142450	175
71	14522	1722	89	286533	87
72	15388	1624	90	*infinita*	

PROPOS. XIV. PROBL. V.

Altitudines, atque sublimitates semiparabolarum, quarum amplitudines aequales futurae sint, per singulos elevationis gr. reperire.

Hæc omnia facili negotio consequemur. Posita enim semiparabolæ amplitudine partium semper 10000, medietas tangentis cujuslibet gradus elevationis altitudinem exhibet. Ut exempli grat. semiparabolæ, cujus elevatio sit gr. 30. amplitudo vero, ut ponitur, partium 10000, altitudo erit 2887, tanta enim est proxime medietas tangentis. Inventa autem altitudine, sublimitatem eliciemus tali pacto. Cum demonstratum sit dimidiam amplitudinem, semiparabolæ mediam esse proportionalem inter altitudinem, et sublimitatem, sitque altitudo jam reperta, medietas vero amplitudinis semper eadem, partium scilicet 5000, si hujus quadratum per altitudinem datam diviserimus, sublimitas quæsita exurget. Ut in exemplo. Altitudo reperta fuit 2887, Quadratum partium 5000 est 25000000. quod divisum per 2887 dat 8659 proxime pro sublimitate quæsita.

Salv. Or qui si vede primieramente, come è verissimo il concetto accennato di sopra, che nelle diverse elevazioni, quanto più si allontanano dalla media, o sia nelle più alte, o nelle più basse, tanto si ricerca maggiore impeto, e violenza per cacciar il projetto nella medesima lontananza. Imperocchè consistendo l' impeto nella mistione dei due moti, orizzontale equabile, e perpendicolare naturalmente accelerato, del quale impeto viene ad esser misura l' aggregato dell' altezza, e della sublimità, vedesi dalla proposta tavola tale aggregato esser minimo nell' elevazione di grad. 45, dove l' altezza, e la sublimità sono eguali, cioè 5000 ciascheduna; e' l' aggregato loro 10000. Che se noi cercheremo ad altra maggiore altezza, come per esempio di grad. 50. troveremo l' altezza esser 5959, e la sublimità 4196, che giunti insieme sommano 10155. E tanto troveremo parimente esser l' impeto di grad. 40, essendo questa, e quella elevazione egualmente lontane dalla media. Dove dobbiamo secondariamente notare esser vero, che eguali impeti si ricercano a due a due delle elevazioni distanti egualmente dalla media, con questa bella alternazione di più, che l' altezze, e le sublimità delle superiori elevazioni contrariamente rispondono alle sublimità, ed altezze delle inferiori: sicchè dove nell' esempio proposto nell' elevazione di 50 grad. l' altezza è 5959, e la sublimità 4196. nel-

l' elevazione di grad. 40 accade all' incontro l' altezza esser 4196 e la sublimità 5559. e l' istesso accade in tutte l' altre senza veruna differenza: se non in quanto per fuggire il tedio del calcolare non si è tenuto conto di alcune frazioni, le quali in somme così grandi non sono di momento, nè di pregiudizio alcuno.

Sagr. Io vo osservando, come delli due impeti orizzontale, e perpendicolare nelle projezioni, quanto più sono sublimi, tanto meno vi si ricerca dell' orizzontale, e molto del perpendicolare. All' incontro nelle poco elevate, grande bisogna che sia la forza dell' impeto orizzontale, che a poca altezza dee cacciar il projetto. Ma sebben io capisco benissimo, che nella totale elevazione di gr. 90. per cacciare il projetto un sol dito lontano dal perpendicolo, non basta tutta la forza del mondo: ma necessariamente dee egli ricadere nell' istesso luogo, onde fu cacciato; non però con simil sicurezza ardirei di affermare, che anco nella nulla elevazione, cioè nella linea orizzontale, non potesse da qualche forza, benchè non infinita, esser in alcuna lontananza spinto il projetto. Sicchè per esempio nè anco una Colubrina sia potente a spignere una palla di ferro orizzontalmente, come dicono, di punto bianco, cioè di punto niuno, che è dove non si dà elevazione. Io dico, che in questo caso resto con qualche ambigui-

tà: e che io non neghi risolutamente il fatto, mi ritiene un altro accidente, che par non meno strano, e pure ne ho la dimostrazione concludente necessariamente. E l' accidente è l' esser impossibile distendere una corda, sicchè resti tesa dirittamente, e parallela all'orizzonte, ma sempre fa sacca, e si piega, nè vi è forza, che basti a tenderla rettamente.

Salv. Adunque, Sig. Sagr. in questo caso della corda cessa in voi la maraviglia circa la stravaganza dell' effetto, perchè ne avete la dimostrazione. Ma se noi ben considereremo, forse troveremo qualche corrispondenza tra l' accidente del projetto, e questo della corda. La curvità della linea del projetto orizzontale par che derivi dalle due forze, delle quali una (che è quella del projciente) lo caccia orizzontalmente, e l' altra (che è la propria gravità) lo tira in giù a piombo. Ma nel tender la corda vi sono le forze di coloro, che orizzontalmente la tirano, e vi è ancora il peso dell'istessa corda, che naturalmente inclina al basso. Son dunque queste due generazioni assai simili. E se voi date al peso della corda tanta possanza, ed energia di poter contrastare, e vincer qualsivoglia immensa forza, che la voglia distendere dirittamente, perchè vorrete negarla al peso della palla? Ma più voglio dirvi, recandovi insieme maraviglia, e diletto, che la corda così tesa, e poco, o molto tirata,

si piega in linee, le quali assai si avvicinano alle paraboliche, e la similitudine è tanta, che se voi segnerete in una superficie piana, ed eretta all'orizzonte una linea parabolica, e tenendola inversa, cioè col vertice in giù, e colla base parallela all'orizzonte, facendo pendere una catenella sostenuta nelle estremità della base della segnata parabola, vedrete allentando più, o meno la detta catenuzza incurvarsi, e adattarsi alla medesima parabola; e tale adattamento tanto più esser preciso, quanto la segnata parabola sarà men curva, cioè più distesa; sicchè nelle parabole descritte con elevazioni sotto ai grad. 45 la catenella cammina quasi *ad unguem* sopra la parabola.

Sagr. Adunque con una tal catena sottilmente lavorata si potrebbero in un subito punteggiar molte linee paraboliche sopra una piana superficie.

Salv. Potrebbesi, ed ancora con qualche utilità non piccola, come appresso vi dirò.

Simp. Ma prima che passar più avanti, vorrei pur io ancora restar assicurato almeno di quella proposizione, della quale voi dite essercene dimostrazione necessariamente concludente, dico dell'esser impossibile per qualunque immensa forza fare star tesa una corda drittamente, ed equidistante all'Orizzonte.

Sagr. Vedrò se mi sovviene della dimostrazione, per intelligenza della quale bisogna Sig. Simp. che voi supponghiate per vero quello, che in tutti gli strumenti meccanici non solo coll' esperienza, ma colla dimostrazione ancora si verifica; e questo è, che la velocità del movente, benchè di forza debole, può superare la resistenza, benchè grandissima, di un resistente, che lentamente debba esser mosso, tuttavolta che maggior proporzione abbia la velocità del movente alla tardità del resistente, che non ha la resistenza di quel che debbe esser mosso alla forza del movente.

Simp. Questo mi è notissimo, e dimostrato da Aristotile nelle sue questioni meccaniche, e manifestamente si vede nella leva, e nella stadera, dove il romano, che non pesi più di 4 libbre, leverà un peso di 400, mentre che la lontananza di esso romano dal centro, sopra il quale si volge la stadera, sia più di cento volte maggiore della distanza dal medesimo centro di quel punto, dal quale pende il gran peso: e questo avviene, perchè nel calar che fa il romano, passa spazio più di cento volte maggiore dello spazio, per lo quale nel medesimo tempo monta il gran peso. Che è l' istesso che dire, che il piccolo romano si muove con velocità più, che cento volte maggiore della velocità del gran peso.

Sagr. Voi ottimamente discorrete, e non mettete dubbio alcuno nel concedere, che per piccola che sia la forza del movente, supererà qualsivoglia gran resistenza, tutta volta che quello più avanzi di velocità, che ei non cede di vigore, e gravità. Or venghiamo al caso della corda. E segnando un poco di figura intendete per ora questa linea A B (Fig. xx.) passando sopra i due punti fissi, e stabili A, B aver nelle estremità sue pendenti, come vedete, due immensi pesi C, D, li quali tirandola con grandissima forza la facciano star veramente tesa dirittamente, essendo essa una semplice linea senza veruna gravità. Or qui vi soggiungo, e dico, che se dal mezzo di quella, che sia il punto E, voi sospenderete qualsivoglia piccolo peso, quale sia questo H; la linea A B cederà, ed inclinando verso il punto F, ed in conseguenza allungandosi costrignerà i due gravissimi pesi C, D a salire in alto: il che in tal guisa vi dimostro. Intorno ai due punti A, B, come centri, descrivo due quadranti E F G, E L M; ed essendo che li due semidiametri A I, B L sono eguali alli due A E, E B, gli avanzi F I, F L saranno le quantità degli allungamenti delle parti A F, F B, sopra le A E, E B; ed in conseguenza determinano le salite dei pesi C, D, tuttavolta però che il peso H avesse avuto facoltà di calare in F. Il che allora potrebbe seguire, quando la linea E

F, che è la quantità della scesa di esso peso H, avesse maggior proporzione alla linea F I, che determina la salita dei due pesi C, D; che non ha la gravità di amendue essi pesi alla gravità del peso H. Ma questo necessariamente avverrà, sia pur quanto si voglia massima la gravità dei pesi C, D, e minima quella dell' H. Imperocchè non è sì grande l' eccesso dei pesi C, D sopra il peso B, che maggiore non possa essere a proporzione l' eccesso della tangente E F sopra la parte delle segante F I. Il che proveremo così: sia il cerchio, il cui diametro G I: e qual proporzione ha la gravità dei pesi C, D alla gravità di H, tale l' abbia la linea B O ad un' altra, che sia C, della quale sia minore la D, sicchè maggior proporzione avrà la B O alla D, che alla C; prendasi dalle due O B, D la terza proporzionale B E, e come O E ad E B, così si faccia il diametro G I (prolungandolo) all' I F, e dal termine F tirisi la tangente F N. E perchè si è fatto, come O E ad E B, così G I ad I F, sarà componendo, come O B a B E, così G F ad F I. Ma tra O B, e B E media la D, e tra G F, F I media la N F; adunque N F alla F I ha la medesima proporzione, che la O B alla D, la qual proporzione è maggiore di quella dei pesi C D al peso H. Avendo dunque maggior proporzione la scesa, o velocità del peso H alla salita, o velocità dei pesi

C, D, che non ha la gravità di essi pesi C, D alla gravità del peso H; resta manifesto, che il peso H descenderà, cioè la linea A B partirà dalla rettitudine orizzontale. E quel che avviene alla retta A B priva di gravità mentre si attacchi in E qualsivoglia minimo peso H, avviene all' istessa corda A B intesa di materia pesante, senza l' aggiunta di alcun altro grave; poichè vi si sospende il peso istesso della materia componente essa corda A B.

Simp. Io resto soddisfatto a pieno; però potrà il Sig. Salv. conforme alla promessa esplicarci, qual sia l'utilità, che da simile catenella si può ritrarre, e dopo questo arrecarci quelle speculazioni, che dal nostro Accademico sono state fatte intorno alla forza della percossa.

Salv. Assai per questo giorno ci siamo occupati nelle contemplazioni passate, l' ora, che non poco è tarda, non ci basterebbe a gran segno per disbrigarci dalle nominate materie; però differiremo il congresso ad altro tempo più opportuno.

Sagr. Concorro col parere di V. S. perchè da diversi ragionamenti avuti con amici intrinseci del nostro Accademico ho ritratto, questa materia della forza della percossa essere oscurissima, nè di quella sin ora esserne, da chiunque ne ha trattato, penetrato i suoi ricetti pieni di tenebre, ed alieni in tutto e per tutto dalle prime immaginazioni umane; e tra le con-

clusioni sentite proffevire me ne resta in fantasia una stravagantissima, cioè, che la forza della percossa è indeterminata, per non dire infinita. Aspetteremo dunque la comodità del Sig. Salv. Ma intanto dicami che materie son queste, che si vedono scritte dopo il trattato dei projetti?

Salv. Queste sono alcune proposizioni attenenti al centro di gravità dei solidi, le quali in sua gioventù andò ritrovando il nostro Accademico, parendogli, che quello, che in tal materia aveva scritto Federigo Comandino, non mancasse di qualche imperfezione. Credette dunque con queste proposizioni, che qui vedete scritte, poter supplire a quello, che si desiderava nel libro del Comandino, ed applicossi a questa contemplazione ad instanza dell'Illustriss. Signor Marchese Cuid' Ubaldo del Monte grandissimo Matematico de' suoi tempi, come le diverse sue opere pubblicate ne mostrano, ed a quel Sig. ne dette copia con pensiero di andar seguitando cotal materia anco negli altri solidi non tocchi dal Comandino, ma incontratosi dopo alcun tempo nel libro del Sig. Luca Valerio, massimo Geometra, e veduto, come egli risolve tutta questa materia senza niente lasciare indietro, non seguitò più avanti, benchè le aggressioni sue sieno per istrade molto diverse da quelle del Sig. Valerio.

Sagr. Sarà bene dunque, che in questo tempo, che s' intermette tra i nostri passati, ed i futuri congressi, V. S. mi lasci nelle mani il libro, che io tra tanto anderò vedendo, e studiando le proposizioni conseguentemente scrittevi.

Salv. Molto volentieri eseguisco la vostra domanda, e spero, che V. S. prenderà gusto di tali proposizioni.

APPENDIX,

In qua continentur Theoremata, eorumque demonstrationes, quae ab eodem Auctore circa centrum gravitatis solidorum olim conscripta fuerunt.

POSTULATUM.

Petimus æqualium ponderum similiter in diversis libris dispositorum, si horum quidem compositorum centrum gravitatis libram secundum aliquam rationem diviserit, et illorum etiam gravitatis centrum libram secundum eandem rationem dividere.

LEMMA.

Sit linea A B (Fig. xxii.) bifariam in C secta, cujus medietas A C divisa sit in E, ita ut quam rationem habet B E ad E A, hanc habeat A E ad E C. Dico B E

ipsius E A duplam esse. Quia enim ut B E ad E A, ita E A ad E C; erit componendo, et permutando, ut B A ad A C, ita A E ad E C, est autem ut A E ad E C, nempe ut B A ad A C, ita B E ad E A, quare B E ipsius E A dupla est.

His positis demonstratur; si magnitudines quotcumque sese aequaliter excedentes, et quarum excessus earum minimae sint aequales, ita in libra disponantur, ut ex distantiis aequalibus pendeant, centrum gravitatis omnium libram ita dividere, ut pars versus minores reliquae sit dupla.

In Libra itaque A B (Fig. XXIII.) ex distantiis æqualibus pendeant quotcunque numero magnitudines F, G, H, K, N, quales dictum est, quarum minima sit N; sintque puncta suspensionum A, C, D, E, B, sitque omnium magnitudinum sic dispositarum gravitatis centrum X. Ostendendum est partem libræ B X versus minores magnitudines reliquæ X A duplam esse.

Dividatur libra bifariam in puncto D; quod vel in aliquo puncto suspensionum, vel in duarum suspensionum medio cadet necessario, reliquæ vero suspensionum distantiæ, quæ inter A et D intercipiuntur,

omnes bifariam dividantur punctis M, I; magnitudines deinde omnes in partes ipsi N æquales dividantur: erunt jam partes ipsius F tot numero, quot sunt, quæ ex libra pendent magnitudines, partes vero ipsius G erunt una pauciores, et sic de reliquis. Sint itaque ipsius F partes N, O, Y, S, T, ipsius G vero N, O, Y, S, ipsius H quoque N, O, Y, ipsius denique K sint N, O; eruntque magnitudines omnes, in quibus N ipsi F æquatur; magnitudines vero omnes, in quibus O ipsi G æquatur; et magnitudines, in quibus Y ipsi H; illæ autem, in quibus S ipsi K, et magnitudo T ipsi N æqualis est. Quia igitur magnitudines omnes, in quibus N inter se sunt æquales, æque ponderabunt in signo D, quod libram A B bifariam dividit, et eandem ob causam omnes magnitudines, in quibus O æque ponderant in I, illæ autem, in quibus Y in C, et in quibus S in M, æque ponderant; T autem in A suspenditur. Sunt igitur in libra A D, ex distantiis æqualibus D, I, C, M, A suspensæ magnitudines, sese æqualiter excedentes, et quarum excessus minimæ æquatur: maxima autem, quæ est composita ex omnibus N, pendet ex D; minima, quæ est T, pendet ex A, et reliquæ ordinate dispositæ sunt. Estque rursus alia libra A B; in qua magnitudines aliæ prædictis numero, et magnitudine æquales eodem ordine dispositæ sunt. Quare libræ A B, A D a centris om-

nium magnitudinum secundum eandem rationem dividentur. Est autem centrum gravitatis dictarum magnitudinum X: quare X dividit libras B A, A D sub eadem ratione: ita ut sicut B X ad X A, ita X A ad X D; quare B X dupla est ipsius X A ex lemmate supra posito. Quod erat probandum.

Si conoidi parabolico figura inscribatur, et altera circumscribatur ex cylindris aequalem altitudinem habentibus, et axis dicti conoidis dividatur, ita ut pars ad verticem partis ad basin sit dupla: centrum gravitatis inscriptae figurae basi portionis dicto puncto divisionis erit propinquius: centrum autem gravitatis circumscriptae a basi conoidis eodem puncto erit remotius; eritque utrorumque centrorum a tali puncto distantia aequalis lineae, quae sit pars sexta altitudinis unius cylindri, ex quibus figurae constant.

Sit itaque conoidale parabolicum, et figuræ, quales dictæ sunt, altera sit inscripta, altera circumscripta, et axis conoidis qui sit A E (Fig. xxv.) dividatur in N, ita ut A N ipsius N E sit dupla. Ostendendum est centrum gravitatis inscriptæ figuræ esse in linea N E, circumscriptæ autem centrum esse in A N. Secentur figuræ ita dispositæ plano per axem, et sit sectio parabolæ B A C; plani autem secantis, et basis conoidis sectio sit B C linea; cylindrorum autem sectiones sint rectangulæ fi-

guræ: ut in descriptione apparet: primus itaque cylindrus inscriptorum, cujus axis est D E, ad cylindrum, cujus axis est D Y, eandem habet rationem quam quadratum O D ad quadratum S Y, hoc est, quam D A ad A Y: cylindrus autem, cujus axis est D Y, ad cylindrum Y Z est ut S Y ad R Z potentia; hoc est, ut Y A ad A Z, et eadem ratione cylindrus, cujus axis est Z Y, ad eum, cujus axis est Z V, est ut Z A ad A V, dicti itaque cylindri sunt inter se ut lineæ D A, A Y; Z A, A V: istæ autem sese æqualiter excedentes, et est excessus æqualis minimæ, ita ut A Z dupla sit ad A V, A Y autem ejusdem est tripla, et D A quadrupla; sunt igitur dicti cylindri magnitudines quædam sese ad invicem æqualiter excedentes, quarum excessus æquantur earum minimæ, et est linea X M, in qua ex distantiis æqualibus suspensæ sunt (unumquodque enim cylindrorum centrum gravitatis habet in medio axis) quare per ea quæ superius demostrata sunt centrum gravitatis magnitudinis ex omnibus compositæ dividet lineam X M, ita ut pars ad X reliquæ sit dupla. Dividatur itaque, et sit X α ipsius α M dupla; est ergo α centrum gravitatis inscriptæ figuræ. Dividatur A V bifariam in ε; erit ε X dupla ipsius M E; est autem X α dupla ipsius α M; quare ε E tripla erit E α; est autem A E tripla ipsius E N: constat ergo, E N majorem esse quam E α,

et ideo α, quod est centrum figuræ inscriptæ, magis accedere ad basin conoidis quam N, et quia est ut A E ad E N, ita ablatum ε E ad ablatum E α; erit et reliquum ab reliquum, idest, A ε ad N α, ut A E ad E N. Est ergo α N tertia pars ipsius A ε, et sexta ipsius a V. Eodem autem pacto cylindri circumscriptæ figuræ demostrabuntur esse sese æqualiter excedentes, et esse excessus æquales minimo, et habere in linea ε M centra gravitatum in distantiis æqualibus. Si itaque dividatur ε M in π, ita ut ε π reliquæ π M sit dupla; erit π centrum gravitatis totius circumscriptæ magnitudinis, et cum ε π dupla sit ad π M; A ε autem minor sit quam dupla ad E M: (cum ei sit æqualis:) erit tota A E minor quam tripla ipsius E π; quare E π major erit ipsa E N, et cum ε M tripla sit ad M π, et M E eum duabus ε A similiter tripla sit ad M E; erit tota A E cum A ε tripla ad E π, est autem A E tripla ad E N; quare reliqua A ε reliquæ π N tripla erit. Est igitur N π sexta pars ipsius A V. Hæc autem sunt, quæ demostranda fuerunt. Ex his manifestum est, posse conoidi parabolico figuram inscribi; ed alteram circumscribi, ita ut centra gravitatum earum a puncto N minus quacunque proposita linea distent. Si enim sumatur linea propositæ lineæ sexcupla, fiantque cylindrorum axes, ex quibus figuræ componuntur hac sumpta linea minores; erunt, quæ inter harum figu-

rarum centra gravitatum, et signum N cadunt, lineæ proposita linea minores.

ALITER IDEM.

Axis conoidis, qui sit C D (Fig. xxv.) dividatur in O, ita ut C O, ipsius O D sit dupla. Ostendendum est, centrum gravitatis inscriptæ figuræ esse in linea O D; circumscriptæ vero centrum esse in C O. Secentur figuræ plano per axem, et C, ut dictum est. Quia igitur cylindri S N, T M, V I, X E, sunt inter se, ut quadrata linearum S D, T N, V M, X I; hæc autem sunt inter se, ut lineæ N C, C M, C I, C E; hæ autem sunt sese æqualiter excedentes, et excessus æquantur minimæ, nempe C E; estque cylindrus T M cylindro Q N æqualis; cylindrus autem V I ipsi P N, et X E ipsi L N æquatur; ergo cylindri S N, Q N, P N, L N, sunt sese æqualiter excedentes, et excessus æquantur minimo, eorum nempe cylindro L N. Est autem excessus cylindri S N super cylindrum Q N anulus, cujus altitudo est Q T, hoc est N D; latitudo autem S Q: excessus autem cylindri Q N super P N est anulus, cujus latitudo est Q P, excessus autem cylindri P N super L N est anulus, cujus latitudo P L. Quare dicti anuli S Q, Q P, P L, sunt inter se æquales, et cylindro L

N. Anulus igitur S T æquatur cylindro X E; anulus Q V, qui ipsius est duplus, æquatur cylindro V I, qui similiter cylindri X E duplus est, et eamdem ob causam anulus P X cylindro T M, et cylindrus L E cylindro S N æqualis erit. In libra itaque K F puncta media rectarum E I, D N connectente, et in partes æquales punctis H, G secta, sunt magnitudines quædam, nempe cylindri S N, T M, V I, X E, et gravitatis centrum primi cylindri est K; secundi vero est H; tertii G; quarti F. Habemus autem et aliam libram M K; quæ est ipsius F K dimidia, totidemque punctis in partes æquas distributa, nempe M H, H N, N K, et in ea aliæ magnitudines illis, quæ sunt in libra F K, numero et magnitudine æquales, et centra gravitatum in signis M, H, N, K habentes, et eodem ordine dispositæ sunt: cylindrus enim L E centrum gravitatis habet in M, et æquatur cylindro S N centrum habenti in K: anulus vero P X centrum habet H, et æquatur cylindro T M, cujus centrum est H, et anulus Q V, centrum habens N, æquatur cylindro V I, cujus centrum est G; et denique anulus S T, centrum habens K, æquatur cylindro X E, cujus centrum est F. Igitur centrum gravitatis dictarum magnitudinum libram dividet in eadem ratione: earundem vero unum est centrum, ac propterea punctum aliquod utrique libræ commune, quod sit Y. Itaque F Y ad Y K erit

ut K Y ad Y M; est ergo F Y dupla ipsius Y K; et divisa C E bifariam in Z, erit Z F dupla ipsius K D; ac propterea Z D tripla ipsius D Y; rectæ vero D O tripla est C D: major est ergo recta D O, quam D Y; ac propterea Y centrum inscriptæ magis ad basim accedit, quam punctum O. Et quia, ut C D ad D O, ita est ablatum Z D ad ablatum D Y; erit et reliquum C Z ad reliquum Y O, ut C D ad D O; nempe Y O tertia pars erit ipsius C Z; hoc est pars sexta ipsius C E. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, cylindros circumscriptæ figuræ sese æqualiter excedere, et esse excessus æquales minimo, et ipsorum centra gravitatum in distantiis æqualibus libræ K Z constituta, et pariter anulos iisdem cylindris æquales similiter disponi in altera libra K G ipsius K Z dimidia; ac propterea circumscriptæ gravitatis centrum, quod sit R, libras ita dividere, ut Z R ad R K sit, ut K R ad R G. Erit ergo Z R dupla ipsius R K; C Z vero rectæ K D æqualis est, et non dupla; erit tota C D minor quam tripla ipsius D R; quare recta D R major est quam D O, scilicet centrum circumscriptæ a basi magis recedit quam punctum O. Et quia Z K tripla est ad K R, et K D cum duabus Z C tripla ad K D; erit tota C D cum C Z tripla ipsius D R; est autem C D tripla ad D O, quare reliqua C Z reliquæ R O tri-

pla erit; scilicet O R sexta pars est ipsius E C. Quod est propositum.

His autem prædemonstratis demonstratur, centrum gravitatis parabolici conoidis axem ita dividere ut pars ad verticem reliquae ad basim sit dupla.

Esto parabolicum conoidale, cujus axis sit A B (Fig. xxvi.) divisus in N, ita ut A N ipsius N B sit dupla. Ostendendum est, centrum gravitatis conoidis esse N punctum; si enim non est N, aut infra ipsum, aut supra ipsum erit. Sit primum infra, sitque X, et exponatur linea L O ipsi N X æqualis, et L O contingenter dividatur in S et quam rationem habet utraque simul B X, O S, ad O S, hanc habeat conoidale ad solidum Y, et inscribatur conoidi figura ex cylindris æqualem altitudinem habentibus, ita ut quæ inter illius centrum gravitatis, et punctum N intercipitur, minor sit quam L S, excessus autem, quo a conoide superatur, minor sit solido Y; hoc autem fieri posse, clarum est. Sit itaque inscripta, cujus gravitatis centrum sit I; erit jam I X major S O: et quia est, ut X B cum S O ad S O, ita conoidale ad Y; (est autem Y majus excessu quo conoidale figuram inscriptam superat;) erit conoidalis ad dictum excessum proportio major quam utriusque B X, O S, ad S O, et dividendo figura inscripta ad dictum excessum majorem rationem habebit quam B X ad S O: habet autem B X, ad X I proportionem

adhuc minorem quam ad S O: inscripta igitur figura ad reliquas portiones multo majorem proportionem habebit quam B X ad X I: quam igitur proportionem habet inscripta figura ad reliquas portiones, alia quædam linea habebit ad X I; quæ necessario major erit quam B X. Sit igitur M X. Habemus itaque centrum gravitatis conoidis X: figuræ autem in ipso inscriptæ centrum gravitatis est I, reliquarum ergo portionum quibus conoidale inscriptam figuram excedit gravitatis centrum erit in linea X M, atque in eo ipsius puncto in quo sic terminata fuerit ut, quam proportionem habet inscripta figura ad excessum, quo a conoide superatur, eandem ipsam habeat ad X I. Ostensum autem est, hanc proportionem esse illam quam habet M X ac X I: erit ergo M gravitatis centrum earum portionum, quibus conoidale excedit inscriptam figuram, quod certe esse non potest; nam, si per M ducatur planum basi conoidis æquidistans, erunt omnes dictæ portiones versus eandem partem, nec ab eo dividentur. Non est igitur gravitatis centrum ipsius conoidis infra punctum N. Sed neque supra. Sit enim, si fieri potest, H, et rursus, ut supra, exponatur linea L O, æqualis ipsi H N, et contingenter divisa in S: et quam proportionem habet utraque simul B N, S O ad S L; hanc habeat conoidale ad Y, et conoidali circumscribatur figura ex cylindris, ut dictum est, a qua minori

quantitate excedatur, quam sit solidum Y, et linea inter centrum gravitatis circumscriptæ, et signum N sit minor quam S O: erit residua V H major quam L S; et quia est, ut utraque B N, O S ad S L, ita conoidale ad Y; (est autem Y majus excessu, quo conoidale a circumscripta superatur: ergo B N, S O, ad S L minorem rationem habet quam conoidale ad dictum excessum. Est autem B N minor quam utraque B N, S O: V H autem major quam S L; multo igitur majorem rationem habet conoidale ad dictas portiones quam B V ad V H; quam igitur rationem habet conoidale ad easdem portiones, hanc habebit ad V H linea major ipsa B V. Habeat; sitque ea M V, et quia centrum gravitatis circumscriptæ figuræ est V, centrum vero conoidis est H, atque est, ut conoidale ad residuas portiones, ita M V ad V H, erit M centrum gravitatis residuarum portionum: quod similiter est impossibile. Non est ergo centrum gravitatis conoidis supra punctum N. Sed demonstratum est quod neque infra; restat ergo, ut in ipso N sit necessario. Et eadem ratione demonstrabitur de conoide plano super axe non erecto secto. Aliter idem, ut constat in sequenti, centrum gravitatis conoidis parabolici inter centrum circumscriptæ figuræ, et centrum inscriptæ cadit.

Sit conoidale, cujus axis A B (Fig. XXVII.) et centrum circumscriptæ sit C, inscriptæ

vero sit O. Dico, centrum conoidis inter C, O puncta esse; nam si non, infra, vel supra, vel in altero eorum erit. Sit infra, ut in R, et quia R est centrum gravitatis totius conoidis, inscriptae autem figurae est gravitatis centrum O: reliquarum ergo portionum, quibus inscripta figura a conoide superatur, centrum gravitatis erit in linea O R ad partes R extensa, atque in eo puncto, in quo sic terminatur, ut quam rationem habent dictae portiones ad inscriptam, eandem habeat O R ad lineam inter R, et punctum illud cadentem. Sit haec ratio illa, quam habet O R ad R X. Aut igitur X cadet extra conoidem, aut intra, aut in ipsa basi. Si vel extra, vel in basi cadat, jam manifestum est absurdum: cadat intra, et quia X R ad R O est ut inscripta figura ad excessum, quo a conoide superatur, rationem illam, quam habet B R ad R O, eandem habeat inscripta figura ad solidum H, quod necessario minus erit dicto excessu. Et inscribatur alia figura, quae a conoide superetur minori quantitate quam sit H; cujus gravitatis centrum cadet intra O C: Sit V. Et quia prima figura ad H est, ut B R ad R O: secunda autem figura, cujus centrum V major est prima, et a conoide exceditur minori quantitate quam sit H; quam rationem habet secunda figura ad excessum, quo a conoide superatur, hanc habebit ad R U linea major ipsa B R. Est autem R centrum gravitatis conoidis; in-

scriptæ autem secundæ V: centrum ergo reliquarum portionum erit extra conoides infra B, quod est impossibile. Et eodem pacto demonstrabitur, centrum gravitatis ejusdem conoidis non esse in linea C A. Quod autem non sit alterum punctorum C, O, manifestum est. Si enim dicas esse, descriptis aliis figuris, inscripta quidem majori illa, cujus centrum O, circumscripta vero minore ea, cujus centrum C, centrum conoidis extra harum figurarum centrum caderet, quod nuper impossibile esse conclusum est. Restat ergo, ut inter centrum circumscriptæ, et inscriptæ figuræ sit. Quod si ita est, necessario erit in signo illo, quod axem dividit ut pars ad verticem reliquæ sit dupla, cum enim circumscribi, et inscribi possint figuræ, ita ut, quæ inter ipsarum centrum, et dictum signum cadunt lineæ, quacunque linea sint minores, aliter dicentem ad impossibile deduceremus, quod scilicet centrum conoidis non intra inscriptæ, et circumscriptæ centra caderet.

Si fuerint tres lineæ proportionales, et quam proportionem habet minima ad excessum, quo maxima minimam superat, eandem habeat linea quædam sumpta ad duas tertias excessus, quo maxima mediam superat, et item quam proportionem habet composita ex maxima, et dupla mediæ ad compositam ex tripla maximæ, et mediæ, eandem habuerit alia linea sum-

pta ad excessum quo maxima mediam excedit; erunt ambæ lineæ sumptæ simul, tertia pars maxima proportionalium.

Sint tres lineæ proportionales A B, B C, B F (Fig. XXVIII.) et quam proportionem habet B F ad F A, hanc habeat M S ad duas tertias ipsius C A, quam vero proportionem habet composita ex A B, et dupla B C ad compositam ex tripla utriusque A B, B C, eandem habeat alia, nempe S N ad A C. Demonstrandum est, M N tertiam esse partem ipsius A B. Quia itaque A B, B C, B F, sunt proportionales, erunt etiam A C, C F, in eadem ratione; est igitur, ut A B ad B C, ita A C ad C F, et ut tripla A B ad triplam B C, ita A C ad C F. Quam itaque rationem habet tripla A B cum tripla B C ad triplam A B, hanc habebit A C ad lineam minorem ipsa C F. Sit illa C O. Quare componendo, et per conversionem proportionis, O A ad A C eandem habebit rationem, quam tripla A B cum sexcupla B C ad triplam A B cum tripla B C; habet autem A C ad S N eandem rationem, quam tripla A B cum tripla B C ad A B cum dupla B C; ex æquali igitur O A ad N S eandem habebit rationem, quam tripla A B cum sexcupla B C ad A B cum dupla B C; verum tripla A B cum sexcupla B C triplæ sunt ad A B cum dupla B C; ergo A O tripla est ad S. N.

Rursus quia O C ad C A est ut tripla C B ad triplam A B cum tripla C B: est autem, sicut C A ad C F, ita tripla A B ad triplam B C, ex æquali ergo in proportione perturbata, ut O C ad C F, ita erit tripla A B ad triplam A B cum tripla B C: et per conversionem rationis, ut O F ad F C, sic tripla B C ad triplam A B cum tripla B C: est autem, sicut C F ad F B, ita A C ad C B, et tripla A C ad triplam B C. Ex æquali igitur, in proportione perturbata, ut O F ad F B, ita tripla A C ad triplam utriusque simul A B, B C. Tota igitur O B ad B F, erit ut sexcupla A B ad triplam utriusque A B, A C; et quia F C, C A in eadem sunt ratione, et C B, B A, erit sicut F C ad C A, ita B C ad B A, et componendo ut F A ad A C, ita utraque B A, B C ad B A, et sic tripla ad triplam: ergo ut F A ad A C, ita composita ex tripla B A et tripla B C ad triplam A B, quare sicut F A ad duas tertias ipsius A C, sit composita ex tripla B A, et tripla B C ad duas tertias triplæ B A: hoc est, ad duplam B A: sed sicut F A ad duas tertias ipsius A C, ita F B ad M S. Sicut ergo F B ad M S, ita composita ex tripla B A, et tripla B C ad duplam B A; verum sicut O B ad F B, ita erat sexcupla A B ad triplam utriusque A B, B C; ergo ex æquali O B ad M S eandem habebit rationem quam sexcupla A B ad duplam B A, quare M S erit tertia pars ip-

sius O B. Et demonstratum est, S N tertiam esse partem ipsius A O, constat ergo, M N ipsius A B tertiam similiter esse partem, et hoc est, quod demonstrandum fuit.

Cujuslibet frusti a conoide parabolico abscissi centrum gravitatis est in linea recta, quæ frusti est axis; qua in tres æquas partes divisa centrum gravitatis in media existit, eamque sic dividit, at pars versus minorem basim ad partem versus majorem basim, eandem habeat rationem quam major basis ad basim minorem.

A conoide, cujus axis R B (Fig. XXIX.) abscissum sit solidum, cujus axis B E, et planum abscindens sit basi æquidistans, secetur autem altero plano per axem super basim erectum, sitque, sectio parabolæ V, R, C, hujus autem, et plani secantis, et basis sectiones sint lineæ rectæ L M, V C; erit R B diameter proportionis vel diametro æquidistans; L M, V C erunt ordinatim applicatæ. Dividatur itaque E B in tres partes æquales; quarum media sit Q Y; hæc autem signo I ita dividatur, ut, quam rationem habet basis, cujus diameter V C, ad basin, cujus diameter L M; hoc est, quam habet quadratum V C ad quadratum L M; eandem habeat Q I ad I Y. Demonstrandum est, I centrum gravitatis esse frusti L M C. Exponatur linea N S æqualis ipsi B R, et S X æqualis sit E R, ipsa-

rum autem N S, S X sumatur tertia proportionalis S G, et quam proportionem habet N G ad G S, hanc habeat linea B Q ad I O. Nihil autem refert, si punctum O supra vel infra L M cadat; et quia in sectione V R C lineæ L M, V C ordinatim sunt applicatæ, erit ut quadratum V C ad quadratum L M, ita linea B R ad R E; est autem ut quadratum V C ad quadratum L M, ita Q I ad I Y, et ut B R ad R E, ita N S ad S X, ergo Q I ad I Y est ut N S ad S X. Quare ut Q Y ad Y I, ita erit utraque N S, S X, ad S X, et ut E B ad Y I, ita composita ex tripla N S, et tripla S X ad S X; est autem, ut E B ad B Y, ita composita ex tripla utriusque simul N S, S X ad compositam ex N S, S X; ergo ut E B ad B I, ita composita ex tripla N S, et tripla S X ad compositam ex N S et dupla S X. Sunt igitur 3 lineæ proportionales, N S, S X, G S, et quam proportionem habet S G ad G N, hanc habet quædam sumpta O I ad duas tertias ipsius E B, hoc est ipsius N X; quam autem proportionem composita ex N S, et dupla S X, ad compositam ex tripla N S, et tripla S X, eandem habet alia quædam sumpta I B ad B E, hoc est ad N X. Per ea igitur, quæ supra demonstrata sunt, erunt lineæ illæ simul sumptæ tertia pars ipsius N S; hoc est ipsius R B: est ergo R B tripla ipsius B O, quare O erit centrum gravitatis conoidis V R C. Sit

autem A centrum gravitatis conoidis L R M; frusti ergo V L M C centrum gravitatis est in linea O B, atque in eo puncto, qui illam sic terminat, ut quam rationem habet V L M C frustum ad L R M portionem, eam habet linea A O ad eam, quæ inter O, et dictum punctum intercedit. Et quia R O est duæ tertiæ ipsius R B; R A vero duæ tertiæ ipsius R E: erit reliqua A O duæ tertiæ reliquæ E B, et quia est, ut frustum V L M C ad portionem L R M, ita N G ad G S, ita duæ tertiæ E B ad O I; duabus autem tertiis ipsius E B æqualis est linea A O; erit, ut frustum V L M C ad portionem L R M, ita A O ad O I. Constat igitur frusti V L M C gravitatis centrum esse punctum I, et axem ita dividere, ut pars versus minorem basin ad partem versus majorem sit, ut dupla majoris basis una cum minori ad duplam minoris una cum majori. Quod est propositum, elegantius explicatum.

Si magnitudines quotcunque ita inter se sint dispositae, ut secunda addat super primam duplum primae, tertia addat secundam triplum primae, quarta vero addat super tertiam quadruplum primae, et si unaquaeque sequentium super sibi proximam addat magnitudinem primae, multiplicem secundum numerum, quem ipsa in ordine retinuerit: si, inquam, hae magnitudines ordinatim in libra ex distantiis

aequalibus suspendantur: centrum aequilibrii omnium compositarum libram ita dividet, ut pars versus minores magnitudines reliquae sit tripla.

Esto libra L T, et magnitudines, quales dictum est, in ea pendeant, et sint A, F, G, H, K, quarum A ex T suspensa sit prima. Dico, centrum æquilibrii libram T L ita secare, ut pars versus T reliquæ sit tripla. Sit T L tripla ad L I, et S L tripla L P, et Q L ipsius L N, et L P ipsius L O, erunt I P, P N, N O, O L æquales. Et accipiatur in F magnitudo ipsius A dupla, in G vero alia ejusdem tripla, in H ejusdem quadrupla, et sic deinceps, et sint sumptæ magnitudines illæ, in quibus A, et idem fiat in magnitudinibus F, G, H, K. Quum enim in F reliqua magnitudo, nempe B, sit æqualis A, sumatur in G ipsius dupla, in H tripla, etc. et sint hæ magnitudines sumptæ, in quibus B; et eodem pacto sumantur illæ, in quibus C, et in quibus D, et E, erunt jam omnes, in quibus A, æquales ipsi K; composita vero ex omnibus B æquabitur ipsi H; composita ex C ipsi G: ex omnibus D vero composita æquabitur F; et E ipsi A: et quia T I dupla est I L, erit I punctum æquilibrii magnitudinis compositæ ex omnibus A, et similiter, cum S P ipsius P L sit dupla, erit P punctum æquilibrii compositæ ex omnibus B, et eam-

dem ob causam N erit punctum æquilibrii compositæ ex omnibus C; O vero compositæ ex D, et L ipsius E. Est igitur libra quædam T L (Fig. xxx.), in qua ex distantiis æqualibus pendent magnitudines quædam K, H, G, F, A, et rursus est alia libra L I, in qua ex distantiis similiter æqualibus pendent totidem numero magnitudines et eodem ordine prædictis æquales, est enim composita ex omnibus A quæ pendet ex I æqualis K pendenti ex L, et composita ex omnibus B, quæ pendet ex P, æquatur H pendenti ex P; et similiter composita ex C, quæ pendet ex N, æquatur G, et composita ex D, quæ pendet ex O, æquatur F, et E pendens ex L æqualis est A. Quare libræ eadem ratione a centro compositarum magnitudinum dividentur. Unum est autem centrum compositæ ex dictis magnitudinibus. Erit ergo punctum commune rectæ T L; et rectæ L I centrum, quod sit X. Itaque ut T X ad X L, ita erit L X ad X I, et tota T L ad L I, est autem T L ipsius L I tripla, quare, et T X ipsius X L tripla erit.

Si magnitudines quotcumque ita sumantur, ut secunda addat super primam triplum primae, tertia vero super secundam addat quintuplum primae, quarta autem super tertiam addat septuplum primae, et sic deinceps uniuscujusque augmentum

super sibi proximam procedat, multiplex primae magnitudinis secundum numeros consequenter impares, sicuti procedunt quadrata linearum sese aequaliter excedentium, quarum excessus minimae sit aequalis, et in libra ex distantiis aequalibus suspendantur; omnium compositarum centrum aequilibrii libram dividet, ut pars versus minores magnitudines reliquae sit major quam tripla, eadem vero dempta una distantia ejusdem minor sit quam tripla.

Sint in libra B E (Fig. XXXI.) magnitudines, quales dictum est, a quibus auferantur magnitudines aliquæ inter se, ut quæ in præcedenti dispositæ fuerunt; et sint compositæ ex omnibus A, erunt reliquæ, in quibus C, eodem ordine distributæ, sed deficientes maxima. Sit E D tripla D B, et G F tripla F B; erit D centrum æquilibrii compositæ ex omnibus A; F vero compositæ ex omnibus C, quare compositæ ex omnibus A, C, centrum cadet inter D et F. Sit O. Manifestum itaque est, E O ipsius O B majorem esse quam triplam; G O vero ejusdem O B minorem esse quam triplam. Quod demonstrandum erat.

Si cuicumque cono, vel coni portioni ex cylindris aequalem altitudinem habentibus figura una inscribatur, et altera cir-

cumscribatur; itemque axis ejus ita dividatur, ut pars, quae inter punctum divisionis, et verticem intercipitur, reliquae sit tripla: erit inscriptae figurae gravitatis centrum propinquius basi coni, quam punctum illud divisionis, circumscriptae vero centrum gravitatis eodem puncto erit vertici propinquius.

Sit itaque conus, cujus axis N M (Fig. XXXII.) dividatur in S, ita ut N S reliquæ S M sit tripla. Dico, cujuscumque figuræ cono, ut dictum est, inscriptæ centrum gravitatis in axe N M consistere, et ad basin coni magis accedere quam S punctum, circumscriptæ vero gravitatis centrum similiter in axe N M esse, et vertici propinquius, quam sit S. Intelligatur itaque inscripta figura ex cylindris, quorum axes M C, C B, B E, E A æquales sint. Primus itaque cylindrus, cujus axis M C, ad cylindrum, cujus axis C B, eamdem habet rationem quam sua basis ad basin alterius (sunt enim eorum altitudines æquales) hæc autem ratio eadem est ei, quam habet quadratum C N ad quadratum N B. Et similiter ostendetur, cylindrum, cujus axis C B, ad cylindrum, cujus axis B E, eandem habere rationem quam quadratum B N ad quadratum N E, cylindrum vero, cujus axis B E, ad cylindrum circa axem E A eam, quam habet quadratum E N ad quadratum N A; sunt autem lineæ N C,

N B, N E, N A sese æqualiter excedentes, et earum excessus æquantur minimæ, nempe ipsi N A. Sunt igitur magnitudines quædam, nempe inscripti cylindri, eam inter se consequenter rationem habentes, quam quadrata linearum sese æqualiter excedentium, et quarum excessus minimæ æquantur: suntque ita dispositi in libra T I, ut singulorum centra gravitatum in ea, et in distantiis æqualibus consistant. Per ea igitur, quæ supra demonstrata sunt, constat, gravitatis centrum omnium ita compositorum libram T I ita dividere, ut pars versus T sit major quam tripla reliquæ. Sit hoc centrum O; est ergo T O major quam tripla ipsius O I. Verum T N tripla est ad I M; ergo tota M O minor erit quam pars quarta totius M N, cujus M S pars quarta posita est. Constat ergo, signum O basi coni magis accedere quam S. Verum sit jam circumscripta figura constans ex cylindris, quorum axes M C, C B, B E, E A, A N inter se sint æquales; similiter, ut de inscriptis, ostendetur, esse inter se sicut quadratum linearum M N, N C, B N, N E, A N; quæ sese æqualiter excedunt, excessusque æquatur minimæ A N; quare per præmissam centrum gravitatis omnium cylindrorum ita dispositorum, quod sit V, libram R I sic dividet, ut pars versus R, nempe R V, reliquæ V I sit major quam tripla; T V vero ejusdem minor erit quam tripla. Sed N T tripla est

ipsius I M; igitur tota V M major est quam pars quarta totius M N, cujus M S pars quarta posita est. Itaque punctum V vertici propinquius est quam punctum S. Quod ostendendum erat.

Cono dato potest figura circumscribi, et altera inscribi ex cilindris aequalem altitudinem habentibus, ita ut linea, quae inter centrum gravitatis circumscriptae, et centrum gravitatis inscriptae intercipitur, minor sit quacumque linea proposita.

Sit datus conus, cujus axis A B, (Fig. XXXIII.) data autem recta sit K. Dico; Exponatur cylindrus L æqualis ei, qui in cono inscribitur, altitudinem habens dimidium axis A B, et A B dividatur in C, ita ut A C ipsius C B tripla sit, et quam rationem habet A C ad K, hanc habeat cylindrus L ad solidum X. Cono autem circumscribatur figura ex cylindris æqualem altitudinem habentibus, et altera inscribatur, ita ut circumscripta excedat inscriptam minori quantitate, quam sit solidum X; sitque circumscriptæ gravitatis centrum E, quod cadet supra C; inscriptæ vero centrum sit S, cadens sub C. Dico jam, E S lineam ipsa K minorem esse. Nam si non; ponatur ipsi C A æqualis E O, quia igitur O E ad K eandem habet rationem quam L ad X; inscripta vero figura minor non est cylindro L: excessus autem quo

dicta figura a circumscripta superatur, minor est solido X, inscripta igitur figura ad dictum excessum majorem rationem habebit quam O E ad K; ratio autem O E ad K non est minor ea, quam habet O E ad E S cum E S non ponatur minor K; igitur inscripta figura ad excessum, quo a circumscripta superatur, majorem habet rationem quam O E ad E S. Quam igitur rationem habet inscripta ad dictum excessum, hanc habebit ad lineam E S linea quædam major ipsa E O; sit illa E R; est autem inscriptæ figuræ centrum gravitatis S; circumscriptæ vero centrum est E. Constat ergo reliquarum portionum, quibus circumscripta excedit inscriptam, centrum gravitatis esse in linea R E, atque in eo puncto, a quo sic terminatur, ut quam rationem habet inscripta ad dictas portiones, eandem habeat linea inter E, et punctum illud intercepta ad lineam E S; hanc vero rationem habet R E ad E S; ergo reliquarum portionum, quibus circumscripta superat inscriptam figuram, gravitatis centrum erit R, quod est impossibile, planum enim ductum per R basi coni æquidistans dictas portiones non secat. Falsum igitur est, lineam E S non esse minorem ipsa K; erit ergo minor. Hæc autem non dissimili modo in pyramide fieri posse demonstrabuntur.

Ex his manifestum est, cono dato posse figuram unam circumscribi, et alteram

inscribi, ex cylindris æqualem altitudinem habentibus, ita ut lineæ, quæ inter earum centra gravitatum, et punctum, quod axem coni ita dividit, ut pars ad verticem reliquæ sit tripla, intercipiuntur, quacunque data linea sint minores. Cum enim, ut demonstratum est, dictum punctum axem dividens; ut dictum est, semper inter circumscriptæ, et inscriptæ gravitatum centra reperiatur; fierique possit, ut quæ inter eadem centra mediat, linea minor sit quacumque linea proposita; multo minor eadem proposita linea sit, quæ inter alterum centrorum, et dictum punctum axem dividens intercipitur.

Cujuslibet coni, vel pyramidis centrum gravitatis axem dividit, ut pars ad verticem reliquae ad basin sit tripla.

Esto conus, cujus axis AB (Fig. XXXIV.), et in C dividatur ita, ut A C reliquæ C B sit tripla: ostendendum est, C esse gravitatis centrum coni. Nam si non est, erit coni centrum aut supra, aut infra punctum C. Sit prius infra; et sit E: et exponatur linea S P æqualis C E; quæ contingenter dividatur in N, et quam rationem habet utraque simul B E, P N, ad P N, hanc habeat conus ad solidum X, et inscribatur cono solida figura ex cylindris æqualem altitudinem habentibus, cujus centrum gravitatis a puncto C minus distet quam sit linea S N; et excessus, quo a cono superatur, minor sit solido X; hæc enim fieri

posse, ex demonstratis manifestum est. Sit jam inscripta figura qualis petitur, cujus centrum gravitatis sit I. Erit igitur I E linea major quam N P, cum S P sit æqualis C E, et I C minor S N: et, quia utraque simul B E, N P, ad N P est ut conus ad X: excessus autem, quo conus inscriptam figuram superat, minor est solido X: ergo conus ad dictum excessum majorem rationem habebit quam utraque B E, N P ad N P: et dividendo inscripta figura ad excessum, quo a cono superatur, majorem rationem habebit quam B E ad N P: habet autem B E ad E I minorem adhuc rationem quam ad N P cum I E, cum major sit N P, ergo inscripta figura ad excessum, quo a cono superatur, multo majorem rationem habet quam B E ad E I. Quam igitur rationem habet inscripta ad dictum excessum, hanc habebit ad E I linea quædam major ipsa B E. Sit illa M E. Quia igitur M E ad E I est, ut inscripta figura ad excessum, quo a cono superatur, et est E centrum gravitatis coni, I vero est gravitatis centrum inscriptæ: ergo M erit centrum gravitatis reliquarum portionum, quibus conus inscriptam sibi figuram excedit, quod est impossibile. Non est ergo centrum gravitatis coni infra C punctum. Sed neque supra. Nam, si potest, sit R; et rursus sumatur linea S P contingenter in N secta: et quam rationem habet utraque simul B C, N P ad N S, hanc habeat conus ad X; et circumscribatur simi-

liter cono figura, a qua minori quantitate superetur, quam sit solidum X: et linea, quæ inter illius centrum gravitatis, et C intercipitur, minor sit ipsa N P. Sit jam circumscripta, cujus centrum sit O: erit reliqua O R major ipsa N S; et quia ut utraque simul B C, P N, ad N S, ita conus ad X: excessus vero, quo conus a circumscripta superatur, minor est quam X: ipsa vero B O minor est quam utraque simul B C, P N: ipsa autem O R major quam S N: Conus igitur ad reliquas portiones, quibus a circumscripta superatur, multo majorem rationem habebit, quam B O ad O R. Habeat rationem illam M O ad O R: erit M O major ipsa B C: et M erit centrum gravitatis portionum, quibus conus a circumscripta superatur figura, quod est inconveniens. Non est ergo gravitatis centrum ipsius coni supra punctum C: neque infra, ut ostensum est, ergo erit ipsum C. Et idem eodem prorsus modo in pyramide quacumque demonstrabitur.

Si fuerint quatuor lineae continue proportionales; et quam rationem habet minima earum ad excessum, quo maxima minimam superat, eandem habuerit linea quaedam sumpta ad $\frac{3}{4}$ *excessus, quo maxima secundam superat: quam autem rationem habet linea his aequalis (maximae, duplae secundae, et triplae tertiae) ad lineam aequalem quadruplae maximae,*

quadruplae secundae, et quadruplae tertiae; eandem habuerit alia quaedam sumpta ad excessum, quo maxima secundam superat: erunt istae duae lineae simul sumptae quarta pars maximae proportionalium.

Sint enim quatuor lineæ proportionales, A B, B C, B D, B E (Fig. xxxv.) et quam rationem habet B E ad E A, eandem habeat F G ad $\frac{3}{4}$ ipsius A C. quam autem rationem habet linea æqualis A B, et duplæ B C, et triplæ B D ad æqualem quadruplæ ipsarum A B, B C, B D: hanc habeat K G ad A C. Ostendendum est, K F quartam esse partem ipsius A B. Quia igitur A B, B C, B D, B E sunt proportionales: in eadem ratione erunt etiam A C, C D, D E: et ut quadrupla ipsarum A B, B C, B D, ad A B cum dupla B C, et tripla B D, ita quadrupla ipsarum A C, C D, D E, hoc est quadrupla ipsius A E, ad A C cum dupla C D, et tripla D E; et sic est A C ad K G; ergo ut tripla ipsius A E ad A C cum dupla C D, et tripla D E, ita $\frac{3}{4}$ ipsius A C ad K G. est autem, ut tripla A E ad triplam E B, ita $\frac{3}{4}$ A C ad G F; ergo per conversam vigesimam quartam quinti ut tripla A E ad A C cum dupla C D, et tripla D B, ita $\frac{3}{4}$ ipsius A C ad K F, et ut quadrupla

A E ad A C cum dupla C D, et tripla D B, hoc est ad A B cum C B, et B D; ita A C ad K F: et permutando, ut quadrupla A E ad A C, ita A B cum C B, et B D ad K F; ut autem A C ad A E, ita A B ad A B cum C B, et B D, ergo ex æquali, in proportione perturbata, ut quadrupla A E ad A E, ita A B ad K F. Quare constat, K F quartam esse partem ipsius A B.

Cujuscunque frusti pyramidis seu coni plano aequidistante secti centrum gravitatis in axe consistit, eumque ita dividit ut pars versus minorem basin ad reliquam sit ut tripla majoris basis cum spatio duplo medii inter basin majorem et minorem una cum basi minori, ad triplam minoris basis cum eodem duplo spatii medii etiam basi majori.

A cono vel pyramide, cujus axis A D (Fig. xxxvi.), secetur plano basi æquidistante frustum, cujus axis V D, et quam rationem habet tripla maximæ basis cum dupla mediæ, et minima, ad triplam minimæ cum dupla mediæ, et maxima, hanc habeat V O ad O D. Ostendendum est, O centrum gravitatis frusti existere. Sit V M quarta pars ipsius V D.

Exponatur linea H X ipsi A D æqualis, sitque K X æqualis A V, ipsarum vero H X, K X, tertia proportionalis sit X L, et quarta X S: et quam rationem ha-

bet H S ad S X, hanc habeat M D ad lineam sumptam ab O versus A, quæ sit O N, et quia major basis ad eam, quæ inter majorem, et minorem est media proportionalis, est, ut D A ad A U, hoc est, ut H X ad X K: dicta autem media ad minorem est, ut K X ad X L: erunt major, media, et minor basis in eadem ratione; ac lineæ H X, X K, X L.

Quare ut tripla majoris basis cum dupla mediæ, et minima, ad triplam minimæ cum dupla mediæ, et maxima, hoc est, ut V O ad O D; ita tripla H X cum dupla X K, et X L ad triplam X L cum dupla X K, et X H: et componendo, et convertendo, erit O D ad D V, ut H X cum dupla X K, et tripla X L ad quadruplam ipsarum H X, X K, X L.

Sunt igitur 4 lineæ proportionales, H X, X K, X L, X S: et quam rationem habet X S ad S H, hanc habet linea quædam sumpta N O ad $\frac{3}{4}$ ipsius D V, nempe ad D M; hoc est, ad $\frac{3}{4}$ ipsius H K; quam autem rationem habet H X cum dupla X K, et tripla X L ad quadruplam ipsarum H X, X K, X L, eandem habet alia quædam sumpta O D ad D V; hoc est, ad H K. ergo (per ea quæ demonstrata sunt) D N erit quarta pars ipsius H X; hoc est, ipsius A D; quare punctum N erit gravitatis centrum coni, vel pyra-

midis, cujus axis A D. Sit pyramidis vel coni, cujus axis A V, centrum gravitatis I. Constat igitur, centrum gravitatis frusti esse in linea I N ad partes N extensa, in eoque ejus puncto, qui cum puncto N lineam intercipiat, ad quam I N eam habeat rationem, quam abscissum frustum habet ad pyramidem vel conum, cujus axis A V. Ostendendum itaque restat, I N ad N O eandem habere rationem quam frustum ad conum, cujus axis A V. Est autem ut conus, cujus axis D A, ad conum, cujus axis A V; ita cubus D A ad cubum A V, hoc est, cubus H X ad cubum X K; hæc autem eadem est proportio, quam habet H X ad X S: quare dividendo, ut H S ad S X, ita erit frustum, cujus axis D V, ad conum vel pyramidem cujus axis V A; est autem, ut H S ad S X, ita etiam M D ad O N: quare frustum ad pyramidem, cujus axis A V, est ut M D ad N O. Et quia A N est $\frac{3}{4}$ ipsius A D; A I autem est $\frac{3}{4}$ ipsius A V: erit reliqua I N $\frac{3}{4}$ reliquæ V D; quare I N æqualis erit ipsi M D. Et demonstratum est, M D ad N O esse ut frustum ad conum A V. Constat ergo, hanc eandem rationem habere etiam I N ad N O; quare patet propositum.

PRINCIPIO
DELLA QUINTA GIORNATA
DEL GALILEO

Da aggiugnersi all' altre quattro de' discorsi, e dimostrazioni Matematiche intorno alle due nuove scienze appartenenti alla meccanica, ed ai movimenti locali.

INTERLOCUTORI.

Salviati, Sagredo, e Simplicio.

Salv. Grandissima è la consolazione, che io sento nel vedere, dopo l' interposizione di qualche anno, rinnovata in questo giorno la nostra solita adunanza. So che l' ingegno vivace del Sig. Sagredo è tale, che non sa stare in ozio, però mi persuado,

che egli non avrà mancato di fare, nel tempo della nostra lontananza, qualche reflessione sopra le dottrine del moto, le quali furon lette nell' ultima giornata de' nostri passati colloquj. Io, che dalla virtuosa conversazione di V. S. ed anco del nostro Signor Simplicio, ho sempre raccolto frutti di non volgare erudizione, la prego a voler proporre qualche nuova considerazione sopra le cose del nostro Autore già lette da noi. Così daremo principio agli usati discorsi per passar questa Giornata nell'occupazione di virtuoso trattenimento.

Sagr. Non nego a V. S. che in questi anni mi sieno passati per la fantasia varj pensieri sopra le novità dimostrate da quel buon Vecchio intorno alla sua Scienza del moto, sottoposta e ridotta da lui alle dimostrazioni della Geometria. Ed ora, poichè ella così comanda, procurerò di rammentarmi qualche cosa, e darò a lei occasione di beneficare il mio intelletto co' suoi dotti ragionamenti.

Per cominciar dunque per ordine dal principio del Trattato de' moti, proporrò a V. S. uno scrupolo mio antico rinnovatomi nel considerare la dimostrazione, che l'Autore apporta nella sua prima proposizione del moto equabile, la quale procede (come molte altre degli antichi, e moderni Scrittori) per via degli ugualmente multiplici. Questa è una certa ambiguità, che io ho sempre avuta nella mente intorno al-

la quinta, o come altri vogliono sesta difinizione del quinto Libro di Euclide. Stimo mia somma prosperità di aver potuto incontrare occasione di conferir questo dubbio con V. S. del quale spero dover restar totalmente libero.

Simpl. Anzi che io ancora riconoscerò questo nuovo abboccamento colle SS. VV. per benefizio singolare della fortuna, se mi succederà di poter ricever qualche luce intorno a questo punto accennato dal Sig. Sagredo. Non ebbi mai il più duro ostacolo di questo in quella poca di Geometria, che io studiai già nelle Scuole da giovanetto. Però ella s' immagini quanto sia per dovermi essere caro, se dopo tanto tempo sentirò intorno a questo particolare qualche cosa di mia soddisfazione.

Sagr. Dico dunque, che avendo sentito nel dimostrar la prima proposizione dell'Autore intorno al moto equabile adoprarsi gli ugualmente multiplici conforme alla quinta, ovvero sesta difinizione del V. Libro di Euclide, ed avendo io un poco di dubbio già antiquato intorno a questa difinizione, non restai con quella chiarezza, che io avrei desiderato nella predetta proposizione. Ora mi sarebbe pur caro il poter intender bene quel primo principio, per poter poi con altrettanta evidenza restar capace delle cose, che seguono intorno alla dottrina del moto.

Salv. Procurerò di soddisfare al desi-

derio di V. S. con addomesticare in qualche altra maniera quella difinizione di Euclide, e spianar la strada per quanto mi sarà possibile all' introduzione delle proporzionalità. In tanto sappia pure di aver avuto per compagni in questa ambiguità uomini di gran valore, i quali per lungo tempo sono stati colla medesima poca soddisfazione, colla quale V. S. mi dice di ritrovarsi fino a questo giorno.

Io poi confesso, che (1) per qualche anno dopo aver istudiato il V. Libro di Euclide, restai involto colla mente nella stessa caligine. Superai finalmente la difficultà, quando nello studiare le maravigliose Spirali di Archimede, incontrai nel bel principio del Libro una dimostrazione simile alla predetta del nostro Autore. Quell' occasione mi fece andar pensando, se per fortuna ci fosse altra strada più agevole, per la quale si potesse arrivare al medesimo fine, ed acquistare per me, ed anco per altri qualche precisa cognizione nella materia delle proporzioni: però applicai allora l' animo con qualche attenzione a questo proposito, ed esporrò adesso quanto fu da me speculato in quell' opportunità, sottoponendo ogni mio progresso al purgatissimo giudizio delle SS. VV.

---

(1) *Quando, e con qual occasione sovvenissero al Galileo queste speculazioni,*

Supponghasi (1) primieramente (come le suppose anco Euclide, mentre le difinì) che le grandezze proporzionali si trovino. Cioè, che date in qualche modo tre grandezze, quella proporzione, e quel rispetto, o quella relazione di quantità, che ha la prima verso la seconda, la stessa possa averla una terza verso una quarta. Dico poi, che per dare una difinizione delle suddette grandezze proporzionali, la quale produca nell' animo del Lettore qualche concetto aggiustato alla natura di esse grandezze proporzionali, dovremmo prendere una delle loro passioni, ma però la più facile di tutte e quella per appunto, che si stimi la più intelligibile anco dal volgo non introdotto nelle Matematiche. Così fece Euclide stesso in molti altri luoghi. Sovvengavi, che egli non disse, il Cerchio essere una figura piana, dentro la quale segandosi due linee rette, il rettangolo sotto le parti dell' una sia sempre uguale al rettangolo sotto le parti dell' altra: ovvero dentro la quale tutti i quadrilateri abbiano gli angoli opposti uguali a due retti. Quando anche così avesse detto, sarebbero state buone difinizioni. Ma mentre egli sapeva un' altra passione del cerchio più intelligibile della precedente, e più facile da formarsene concetto, chi non si accorge, che egli fece assai meglio a

(1) *Supposizione.*

mettere avanti quella più chiara, e più evidente come difinizione, per cavar poi da essa quell'altre più recondite, e dimostrarle come conclusioni?

Sagr. Per certo che così è, ed io credo, che rari saranno gl'ingegni, i quali totalmente si acquietino a questa difinizione, se io con Euclide dirò così:

Allora quattro grandezze sono proporzionali, quando gli ugualmente multiplici della prima, e della terza, presi secondo qualunque multiplicità, si accorderanno sempre nel superare, mancare, o pareggiare gli ugualmente multiplici della seconda, e della quarta.

E chi è quello d'ingegno tanto felice, il quale abbia certezza, che allora quando le quattro grandezze sono proporzionali, gli ugualmente multiplici si accordino sempre? Ovvero chi sa, che quegli ugualmente multiplici non si accordino sempre anco quando le grandezze non sieno proporzionali? Già Euclide nelle precedenti difinizioni aveva detto.

La proporzione tra due grandezze essere un tal rispetto o relazione tra di loro, per quanto si appartiene alla quantità.

Ora avendo il Lettore concepito già nell'intelletto, che cosa sia la proporzione fra due grandezze, sarà difficil cosa, che egli possa intendere, che quel rispetto, o relazione, che è fra la prima, e la seconda grandezza, allora sia simile al rispetto o relazione che si trova fra la terza, e la

quarta grandezza, quando quegli ugualmente multiplici della prima, e della terza si accordan sempre nella maniera predetta con gli ugualmente multiplici della seconda, e della quarta nell' esser sempre maggiori, o minori, o uguali.

Salv. Comunque ciò sia, parmi questo di Euclide più tosto un teorema da dimostrarsi, che una difinizione da premettersi. Però avendo io incontrato tanti ingegni, i quali hanno arenato in questo luogo, mi sforzerò di secondare colla difinizione delle proporzioni il concetto universale degli uomini anche ineruditi nella Geometria, e procederò in questo modo.

Allora noi diremo quattro grandezze fra loro proporzionali (1), cioe aver la prima alla seconda la stessa proporzione, che ha la terza alla quarta, quando la prima sarà eguale alla seconda, e la terza ancora sarà eguale alla quarta. Ovvero quando la prima sarà tante volte multiplice della seconda, quante volte precisamente la terza è multiplice della quarta. Troverà dubbio alcuno il Sig. Simplicio nell' intender questo?

Simp. Certo che no.

Salv. Ma perchè non sempre accaderà, che fra le quattro grandezze si trovi per appunto la predetta egualità, ovvero multiplicità precisa, procederemo più oltre,

---

(1) *Difinizione delle grandezze proporzionali tra loro commensurabili.*

e domanderò al Sig. Simplicio: Intendete voi, che le quattro grandezze allora sieno proporzionali, quando la prima contenga per esempio tre volte, e mezzo la seconda, ed anco la terza contenga tre volte, e mezzo la quarta?

Simp. Intendo benissimo sin qui, ed ammetto, che le quattro grandezze sieno proporzionali, non solo nel caso esemplificato da V. S. ma ancora secondo qualsivoglia altra denominazione di multiplicità, o superparziente, o superparticolare.

Salv. Per raccoglier dunque ora in breve, e con maggiore universalità tutto quello, che si è detto, ed esemplificato fin qui, diremo, che

Allora noi intendiamo quattro grandezze esser proporzionali fra loro, quando l'eccesso della prima sopra la seconda (qualunque egli sia) sarà simile all'eccesso della terza sopra la quarta.

Simp. Fin qui io non avrei difficultà, ma mi pare che V. S. in questa maniera non apporti la difinizione delle grandezze proporzionali (1), se non quando le antecedenti saranno maggiori delle loro conseguenti, poichè ella suppone, che la prima ecceda la seconda, e che anco la terza ec-

---

(1) *Difinizione generale delle grandezze proporzionali, o commensurabili tra loro, o incommensurabili.*

ceda similmente la quarta. Ma ora interrogo io, come dovrò governarmi quando le antecedenti sieno minori delle loro conseguenti?

Salv. Rispondo, che quando V. S. avrà le quattro grandezze in tal modo, che la prima sia minor della seconda, e la terza minor della quarta, allora sarà la seconda minor della prima, e la quarta maggior della terza. Però V. S. le consideri con quest' ordine inverso, e s' immagini, che la seconda sia prima, e la quarta sia terza. Così avrà le antecedenti maggiori delle conseguenti, e non avrà bisogno di cercare allora difinizione diversa dalla già apportata da noi.

Sagr. Così è per appunto. Ma seguiti Vostra Signoria per grazia col presupposto già fatto di considerare sempre le antecedenti maggiori delle loro conseguenti, il che mi pare, che faciliti assai a lei il discorso, ed a noi l' intelligenza.

Salv. Stabilita questa per difinizione, soggiungerò anco in qual altro modo s' intendano quattro grandezze esser fra loro proporzionali (1), ed è questo. Quando la

---

(1) *Altro modo di difinire le grandezze proporzionali. Difinizione delle grandezze non proporzionali, o commensurabili, o incommensurabili.*

prima per avere alla seconda la medesima proporzione, che la terza alla quarta, non è punto nè maggiore nè minore di quello, che ella dovrebbe essere, allora s' intende aver la prima alla seconda la medesima proporzione, che ha la terza alla quarta. Con questa occasione difinirei ancora la proporzione maggiore, e direi così.

Ma quando la prima grandezza sarà alquanto più grande di quel, che ella dovrebbe essere per avere alla seconda la medesima proporzione, che ha la terza alla quarta, allora voglio, che convenghiamo di dire, che la prima abbia maggior proporzione alle seconda di quella, che ha la terza alla quarta.

Simp. Bene, ma quando la prima fosse minore di quel, che ella dovrebbe esser, per avere alla seconda quella medesima proporzione, che ha la terza alla quarta?

Salv. Mentre la prima sia minor di quel, che si ricercherebbe per aver alla seconda quella medesima proporzione, che ha la terza alla quarta, sarà segno evidente, che la terza è maggior del giusto, per aver alla quarta quella tal proporzione, che ha la prima alla seconda. Però in questo caso ancora V. S. si contenti di concepir l'ordine in altro modo, e s'immagini, che quelle grandezze, che erano terza, e quarta, diventino prima, e seconda, e quell'altre, che erano prima, e secouda, V. S. le riponga ne' luoghi della terza, e della quarta.

Sagr. Fin'ora intendo benissimo il concetto di V. S. e l' introduzione, colla quale ella dà principio alla speculazione delle proporzionali. Parmi ora, che ella si sia messa in obbligo di adempire una delle due cose, cioè o di dimostrare con questi suoi principj tutto il quinto di Euclide, ovvero di dedurre da queste due difinizioni poste da V. S. quell'altre due, che Euclide mette per quinta, e per settima fra le difinizioni, sopra le quali poi egli fonda tutta la macchina del medesimo quinto Libro. Se V. S. dimostrerà queste come conclusioni, non mi resterà più che desiderare intorno a questa materia.

Salv. Questa per appunto è l'intenzion mia: poichè quando si comprenda con evidenza, che date quattro grandezze proporzionali conforme alla medesima difinizione, gli ugualmente multiplici della prima, e della terza si accordano eternamente per necessità in pareggiare, o mancare, o eccedere gli ugualmente multiplici della seconda, e quarta, allora senza altra scorta si può entrare nel quinto Libro di Euclide, e si possono intender con evidenza i Teoremi delle grandezze proporzionali. Così ancora se colla posta difinizione della proporzion maggiore dimostrerò, che in qualche caso presi gli ugualmente multiplici della prima, e della terza, ed anco della seconda, e della quarta, quel della prima ecceda quel della seconda, ma quel della terza

non ecceda quel della quarta, si potrà con questa dimostrazione scorrere gli altri Teoremi delle grandezze sproporzionali. Poichè questa nostra conclusione sarà per appunto la definizione, della quale, come per principio, si serve Euclide stesso.

Simp. Quando io restassi persuaso di queste due passioni degli ugualmente multiplici, cioè che mentre le quattro grandezze son proporzionali, quegli eternamente si accordano nel pareggiare, o eccedere, o mancare; e che, quando le quattro grandezze non son proporzionali, quegli in qualche caso discordano, io per me non richiederei altra luce per intender con chiarezza tutto il quinto degli Elementi Geometrici.

Salv. Ora ditemi, Signor Simplicio, se noi supporremo, che le quattro grandezze A, B, C, D, sieno proporzionali, cioè, che la prima A alla seconconda B abbia la stessa proporzione, che la terza C ha verso la quarta D, intendete voi, che anco due delle prime verso la seconda avranno la medesima proporzione, che due delle terze verso la quarta? (1)

A B

C D

(1) *Assioma*.

Simp. Io l'intendo assai bene, imperciocchè mentre una prima alla seconda ha la medesima proporzione, che una terza alla quarta, non saprei immaginarmi per qual ragione due delle prime alla seconda debbano aver proporzion diversa da quella, che hanno due delle terze alla quarta. (1)

Salv. Adunque mentre V. S. intende questo, intenderà ancora, che quattro, o dieci, o cento delle prime ad una seconda avranno la stessa proporzione, che hanno quattro, o dieci, o cento delle terze ad una quarta.

Simp. Certo che sì, e purchè i numeri delle multiplicità sieno uguali, facilmente apprendo, che la prima presa due volte, o dieci, o cento, avrà la stessa proporzione verso la seconda, che ha la terza presa anche essa due volte, o dieci, o cento, verso la quarta. Sarebbe ben difficile persuadermi il contrario.

Salv. Non è dunque ardua cosa il capire, che il multiplice della prima abbia la stessa proporzione alla seconda, che ha l'ugualmente multiplice della terza alla quarta: cioè che la prima multiplicata quante volte ci pare abbia alla seconda quella proporzione stessa, che ha la terza multiplicata altrettante volte verso la quar-

---

(1) *Il medesimo Assioma più universalmente spiegato.*

ta. Ora tutto quello, che io ho esemplificato fin qui con multiplicare le grandezze antecedenti, ma non già le conseguenti, immaginatevi, che sia detto anco intorno al multiplicare le conseguenti solamente senza punto alterare l'antecedenti, e ditemi: credete voi, che date quattro grandezze proporzionali, la prima a due delle seconde abbia proporzion diversa da quella, che ha la terza a due delle quarte?

Simp. Credo assolutamente di no; anzi quando una prima abbia ad una seconda la medesima proporzione, che una terza ha verso la quarta intendo assai bene, che quella stessa prima a due, o quattro, o dieci delle seconde avrà quella medesima proporzione, che ha la stessa terza verso due, o quattro, o dieci delle quarte.

Salv. Ammettendo dunque voi questo, confessate di restar appagato, e d'intender con facilità, che date quattro grandezze proporzionali A, B, C, D (Fig. XXXVII.) e multiplicate egualmente la prima, e la terza, quella proporzione, che ha il multiplice E della prima A alla seconda B, la stessa ancora abbia precisamente l'ugualmente multiplice F della terza C alla quarta D. (1) Immaginatevi dunque, che queste sieno le nostre quattro grandezze proporzio-

(1) *PROP. I. che è la quarta del V. di Eucl.*

nali, E, B, F, D, cioè il multiplice E della prima sia prima, la seconda stessa B sia seconda, il multiplice poi F della terza sia terza, e la quarta D sia quarta. V. S. mi ha anco detto di capire, che multiplicandosi egualmente le conseguenti B, D, cioè la seconda, e la quarta senza alterar punto le antecedenti, la medesima proporzione avrà la prima al multiplicato della seconda, che la terza al multiplicato della quarta. Ma queste quattro grandezze saranno per appunto E, F, ugualmente multiplici della prima, e della terza, e G, H, egualmente multiplici della seconda, e della quarta.

Sagr. Confesso, che di ciò resto interamente appagato, ed ora intendo benissimo la necessità, per la quale gli ugualmente multiplici delle quattro grandezze proporzionali eternamente si accordano nell'essere o maggiori, o minori, o eguali, ec. (1) Poichè, mentre presi gli ugualmente multiplici della prima, e della terza, e gli ugualmente multiplici della seconda, e della quarta V. S. mi dimostra, che il multiplice della prima al multiplice della seconda ha la medesima proporzione, che il multiplice della terza ha verso il multiplice della quarta, scorgo manifestamente, che quan-

---

(1) *COROL. che è il converso della difinizione del V. degli Elementi.*

do il multiplice della prima sia maggiore del multiplice della seconda, allora il multiplice della terza dovrà necessariamente (per servar la proporzione) esser maggiore del multiplice della quarta. Quando poi sia minore, ovvero uguale, anche il multiplice della terza dovrà esser minore, ovvero uguale al multiplice della quarta.

Simp. Io ancora non sento in ciò repugnanza veruna. Resto bene con desiderio d'intendere come (supposte le quattro grandezze sproporzionali) sia vero, che gli ugualmente multiplici non servino sempre quella concordanza, nell'esser maggiori, o minori, o uguali.

Salv. Io in questo ancora procurerò, che V. S. abbia compiuta soddisfazione.

Ponghansi le quattro grandezze date A B, C, D, E, e sia la prima A B alquanto maggiore di quello, che ella dovrebbe essere per avere alla seconda C quella medesima proporzione, che ha la terza D alla quarta E. (1) Mostrerò, che presi in certa particolar maniera gli ugualmente multiplici della prima, e della terza, e presi altri ugualmente multiplici della seconda, e quarta, quello della prima si troverà maggiore di quello della seconda, ma quello della terza non sarà altrimenti maggiore di

---

(1) *PROP. II. che è il converso della 7 defin. del V. di Euclid.*

quello della quarta, anzi lo dimostrerò esser minore.

Intendasi dunque esser levato dalla prima grandezza A B quell' eccesso, il quale la faceva maggiore di quanto ella dovrebbe essere, acciò fosse precisamente proporzionale, e sia tale eccesso l' F B. Resteranno ora dunque le quattro grandezze proporzionali, cioè la rimanente A F alla C avrà la medesima proporzione, che ha la D alla E.

Multiplichisi F B (Fig. xxxviii) tante volte, che ella sia maggior della C, e sia questo multiplice il segnato H I. Prendasi poi H L altrettante volte multiplice della A F, e la M della D, quante volte per appunto l' H I sarà stata presa multiplice della F B. Stante questo non è dubbio alcuno, che tante volte sarà multiplice la composta L I della composta A B, quante volte la H I della F B, ovvero la M della D è multiplice

Prendasi ora la N multiplice della C con tal legge, che la stessa N sia prossimamente maggiore della L H; ed in ultimo quanto sarà multiplice la N della C, altrettanto pongasi la O multiplice della E.

Ora essendo la multiplice N prossimamente maggiore della L H, se noi dalla N intenderemo esser levata una delle grandezze sue componenti (che sarà eguale alla C) resterà il residuo non maggiore della L H. Se dunque alla stessa N rende-

remo la grandezza eguale alla C, (che intendemmo esser levata) ed alla L H, che è non minore di detto residuo, aggiugneremo la H I, che pure è maggiore dell' aggiunta alla N; sarà tutta la L I maggior della N.

Ecco dunque un caso, nel quale il multiplice della prima supera il multiplice della seconda. Ma essendo le quattro grandezze A F, C, D, E, fatte proporzionali da noi, ed essendosi presi gli ugualmente multiplici L H, ed M della prima, e della terza, ed N, ed O della seconda, e della quarta, saranno essi (per le cose già stabilite di sopra) sempre concordi nell'esser maggiori, o minori, o uguali. Però essendo il multiplice L H della prima grandezza minore del multiplice N della seconda, per la nostra construzione, sarà anco il multiplice M della terza minore necessariamente del multiplice O della quarta.

Si è per tanto provato, che mentre la prima grandezza sarà alquanto maggiore di quello, che ella dovrebbe essere, per avere alla seconda la stessa proporzione, che ha la terza alla quarta: allora sarà possibile di prendere in qualche modo gli ugualmente multiplici della prima, e della terza, ed altri ugualmente multiplici della seconda, e della quarta, e dimostrare, che il multiplice della prima eccede il multiplice della seconda, ma il multiplice della terza non eccede quel della quarta.

Sagr. Molto bene ho inteso quanto V. S. ha dimostrato sin qui. Resta ora, che ella da queste dimostrate premesse deduca come necessarie conclusioni le due controverse difinizioni di Euclide, il che spero le sarà facile, avendo di già dimostrati due Teoremi conversi di quelle.

Salv. Facili per appunto riusciranno; e per dimostrare la quinta difinizione io procederò così.

Se delle quattro grandezze A, B, C, D (Fig. xxxix.) gli ugualmente multiplici della prima, e terza presi secondo qualunque multiplicità sempre si accorderanno nel pareggiare, o mancare, ovvero eccedere gli ugualmente multiplici della seconda, e della quarta respettivamenie, io dico, che le quattro grandezze son fra di loro proporzionali. (1)

Imperocchè sieno (se è possibile) non proporzionali. Adunque una delle antecedenti sarà maggiore di quello, che ella dovrebbe essere per avere alla sua conseguente la stessa proporzione, che ha l'altra antecedente alla sua conseguente. Sia per esempio la segnata A. Adunque per le cose già dimostrate, pigliandosi gli ugualmente multiplici della A, e della C, in una tal maniera, e pigliandosi gli ugual-

---

(1) *PROP. III. che è la difin. 5 del V. di Eucl.*

mente multiplici delle B, D; nel modo che si è insegnato, si mostrerà la multiplice di A maggiore della multiplice di B, ma la multiplice di C non sarà altrimenti maggiore, ma minore della multiplice di D, che è contro al supposto fatto da noi.

Per dimostrar la settima difinizione dirò così. Sieno le quattro grandezze A, B, C, D, e suppongasi, che presi in qualche particolar maniera gli ugualmente multiplici delle due antecedenti prima, e terza, e gli ugualmente multiplici delle due conseguenti seconda, e quarta, suppongasi dico, che si trovi un caso, nel quale il multiplice di A sia maggior del multiplice di B, ma il multiplice di C non sia maggior del multiplice di D. (1) Io dico, che la A alla B avrà maggior proporzione, che la C alla D, cioè che la A sarà alquanto maggiore di quel che ella dovrebbe essere per avere alla B la stessa proporzione, che ha la C alla D.

Se è possibile non sia A maggior del giusto, sarà dunque precisamente proporzionale, ovvero minor del giusto per esser proporzionale. Quanto al primo, se ella fosse precisamente aggiustata, e proporzionale, sarebbero, per le cose già provate, gli ugualmente multiplici della prima, e

---

(1) *PROP. IV. che è la 7 difin. del V. di Eucl.*

della terza presi in qualunque modo sempre concordi nel pareggiare, o mancare, o eccedere gli ugualmente multiplici della seconda, e della quarta; il che è contro alla supposizione.

Se poi la prima fosse minor del giusto per esser proporzionale, questo è segno, che la terza sarebbe maggiore del suo dovere, per avere alla quarta quella proporzione, che ha la prima alla seconda. Allora io direi, che si levasse dalla terza quell' eccesso, che la fa esser maggior del giusto. E però la rimanente resterebbe poi per appunto proporzionale. Ora, considerando quei multiplici particolari supposti da principio, è manifesto, che essendo il multiplice della prima maggior del multiplice della seconda, anco il multiplice della terza, cioè di quella rimanente, sarà maggior del multiplice della quarta. Adunque se in cambio di pigliar il multiplice di quella rimanente, ripiglieremo l'egualmente multiplice di tutta la terza intera, questo sarà maggior, che non era il multiplice di quella rimanente; e però sarà questo stesso molto maggiore di quel della quarta. Il che è contro la supposizione.

Sagr. Resto soddisfattissimo di questa dilucidazione fattami da V. S. in materia, nella quale io ne aveva già lungo tempo bisogno: nè saprei esprimere quale in me sia maggiore, o il gusto di questa cognizione nuovamente acquistata, o il ramma-

rico di non averla io procurata col chiederla a V. S. fin dal principio de' nostri primi abboccamenti, tanto più avendo io inteso; che ella la conferiva a diversi Amici, a' quali per la vicinanza era lecito di frequentar la sua Villa. Ma seguitiamo di grazia i discorsi, quando però il Sig. Simplicio non abbia che replicare intorno alla materia fin qui considerata.

Simp. Io non saprei che soggiugnere, anzi resto interamente appagato del discorso, e capace delle dimostrazioni sentite.

Salv. Posti questi fondamenti, si potrebbe compendiare in parte, e riordinare tutto il quinto di Euclide, ma ciò sarebbe una digressione troppo lunga, e troppo lontana dal nostro principale intento. Oltre che io so, che le SS. VV. averanno veduto di simili compendj stampati da altri Autori.

Ora essendosi considerate fin qui a riquisizione delle SS. VV. le difinizioni quinta, e settima del quinto Libro, spero, che esse concederanno volentieri a me il poter proporre adesso un'antica mia osservazione sovvenutami sopra un'altra difinizione di Euclide medesimo. Il soggetto non sarà diverso dall' incominciato, e non parrà alieno dal nostro proposito, essendo intorno alla proporzion composta, la quale vien maneggiata spesse volte dal nostro Autore ne' suoi Libri.

Trovasi fra le difinizioni del sesto Libro di Euclide la quinta della proporzion composta, la quale dice in questo modo.

Allora una proporzione si dice comporsi di più proporzioni, quando le quantità di dette proporzioni multiplicate insieme avranno prodotto qualche proporzione. (1)

Osservo poi, che nè il medesimo Euclide, nè alcuno altro Autore antico si serve della stessa difinizione nel modo, nel quale ell' è stata posta nel Libro: onde ne seguono due inconvenienti, cioè al Lettore difficultà d'intelligenza, ed allo Scrittore nota di superfluità.

Sagr. Questo è verissimo, ma non mi par probabile, che la suprema accuratezza di Euclide abbia fra' suoi Libri posta questa difinizione inconsideratamente, ed invano. Però non sarei affatto fuor di sospetto, che ella vi fosse stata aggiunta da altri, o almeno alterata di tal sorta, che ella oggidì non si riconosca più, mentre dagli Autori si pone in opera nel dimostrare i Teoremi.

Simp. Che gli altri Autori non se ne servano, io lo crederò alle SS. VV. non avendovi fatto molto studio: mi dispiacerebbe bene se da Euclide stesso, il quale

---

(1) *Definizione 5 del sesto Libro di Eucl.*

viene stimato da voi altri per tanto puntuale nelle sue scritture, fosse stata posta indarno. Ma qui bisogna poi, che io confessi come l'intelletto mio, il quale non si è mai più che mediocremente inoltrato nella Matematica, ha incontrato difficultà intorno a questa diffinizione, forse non minore, che nelle già spianate dal Sig. Salviati.

Mi ajutai un tempo fa con legger lunghissimi Comenti scritti sopra queste materie, ma per dire il vero, non conobbi giammai, che mi si sgombrassero quelle tenebre, che mi tenevano offuscato l'intelletto. Però se V. S. avesse qualche particolar considerazione, che mi facilitasse questo ancora, l'assicuro, che mi farebbe un favore molto segnalato.

Salv. Forse ella si presuppone, che questa sia materia di profonde speculazioni, e pure troverà, che non consiste in altro, che in un semplicissimo avvertimento.

S' immagini V. S. le due grandezze A, B, (Fig. XL.) dello stesso genere. Averà la grandezza A alla B una tal proporzione, e dopo concepisca esser posta fra di loro un'altra grandezza C pur dello stesso genere. Si dice, che quella tal proporzione, che ha la grandezza A alla B viene ad esser composta delle due proporzioni intermedie cioè di quella, che ha la A alla C, e di quella, che ha la C alla B. Questo è per appunto il senso, secondo

il quale Euclide si serve della predetta difinizione.

Simp. È vero, che Euclide intende in questo modo la proporzione composta, ma però non intend' io, come la grandezza A alla B abbia proporzion composta delle due proporzioni, cioè della A alla C, e della C alla B.

Salv. Ora ditemi, Sig. Simplicio, intendete voi, che la A alla B abbia qualche proporzione, qualunque ella sia?

Simp. Essendo esse del medesimo genere, Signor sì.

Salv. E che quella proporzione sia immutabile, e non possa mai essere altra, o diversa da quella che ella è?

Simp. Intendo questo ancora.

Salv. Vi soggiungo ora io, che nello stesso modo per appunto l'A alla C ha una proporzione immutabile, e così anco la C alla B. La proporzione poi, che è fra le due estreme A, e B, si chiama esser composta delle due proporzioni, che mediano fra esse estreme, cioè di quella, che ha la A alla C, e di quella, che ha la C alla B. (1)

Aggiungo di più, che se V. S. fra queste grandezze A, e B, s'immaginerà,

---

(1) *Difinizione da porsi in luogo della* 5 *difin. del VI. d' Euclide.*

che sia frapposta non una grandezza sola; ma più d' una, come ella vede in questi segni A, C, D, B, s' intenderà pure la proporzione della A alla B esser composta di tutte le proporzioni, le quali sono intermedie fra di esse, cioè delle proporzioni,

A, C, D, B,

che hanno la A alla C, la C alla D, e la D alla B, e così se più fussero le grandezze, sempre la prima all' ultima ha proporzion composta di tutte quelle proporzioni, le quali mediano fra di esse.

Avvertisco ora in quest' occasione, che quando le proporzioni componenti sieno uguali fra di loro, o per dir meglio, sieno le stesse, allora la prima all' ultima averà, come di sopra abbiamo detto, una tal proporzione composta di tutte le proporzioni intermedie; ma perchè quelle proporzioni intermedie sono tutte eguali, potremo esprimere il medesimo nostro senso con dire, che la proporzione della prima all' ultima ha una proporzione tanto multiplice della proporzione, che ha la prima alla seconda, quante per appunto saranno le proporzioni, che si frappongono fra la prima, e l' ultima. Come per esempio, se fossero tre termini, e che la medesima proporzione fosse fra la prima, e la seconda, che è fra la seconda, e la terza,

allora sarebbe vero, che la prima alla terza averebbe proporzion composta della due proporzioni, le quali sono fra la prima, e la seconda, e fra la seconda, e la terza; ma perchè queste due proporzioni si suppongono uguali, cioè le stesse, potrà dirsi, che la proporzione della prima alla terza è duplicata della proporzione, che ha la prima alla seconda. Così, quando le grandezze fossero quattro, si potrebbe dire, che la proporzione della prima alla quarta è composta di quelle tre proporzioni intermedie, ed ancora, che è triplicata della proporzione della prima alla seconda, venendo composta tal proporzione, che ha la prima alla quarta, della proporzione della prima alla seconda tre volte presa, ec.

Ma qui finalmente non vanno contemplazioni, nè dimostrazioni, imperciocchè è una semplice imposizione di nome. Quando a V. S. non piacesse il vocabolo di composta, chiamiamola incomposta, o impastata, o confusa, o in qualunque modo più aggrada a V. S. solo accordiamoci in questo, che quando poi averemo tre grandezze dello stesso genere, ed io nominerò la proporzione incomposta, o impastata, o confusa, vorrò intendere la proporzione, che hanno l' estreme di quelle grandezze, e non altro.

Sagr. Tutto questo intendo benissimo, anzi ho più d' una volta osservato l' artifi-

zio d' Euclide nella proposizione, dove ei dimostra, che i parallelogrammi equiangoli hanno la proporzione composta delle proporzioni de' lati. Egli si trova in quel caso aver le due proporzioni componenti in quattro termini, che sono in quattro lati de' parallelogrammi; però comanda, che quelle due proporzioni si mettano in tre termini solamente; sicchè una di quelle proporzioni sia fra il primo termine, e il secondo, l'altra sia fra il secondo, e il terzo. Nella dimostrazione poi non fa altro; se non che ei dimostra, che l'un parallelogrammo all'altro è come il primo termine al terzo: cioè ha la proporzione composta di due proporzioni, di quella, che ha il primo termine al secondo, e dell'altra, che ha il secondo al terzo, le quali sono quelle due proporzioni, che prima egli aveva disgiunte ne' quattro lati de' parallelogrammi.

Salv. V. S. discorre benissimo. Ora intesa, e stabilita la difinizione della proporzione composta in questo modo (la quale non consiste in altro fuorì che nell'accordarsi, che sorta di roba noi intendiamo sotto quel nome) si può dimostrare la proposizion ventitrè del sesto libro di Euclide, come la dimostra egli stesso, perchè quivi ei non suppone la difinizione nel modo, nel quale ell' è divulgata, ma bensì nel modo detto sopra da noi. Dopo la nominata proposizion 23 io soggiugne-

rei, come corollario di essa la divulgata difinizione quinta del sesto libro della proporzion composta, tramutandola però in un Teorema.

Pongasi due proporzioni, una delle quali sia ne' termini A, B, l'altra ne' termini C, D. Dice la difinizione vulgata, che la proporzione composta di queste due proporzioni si averà, se noi multiplicheremo fra di loro le quantità di esse proporzioni. Io concorro col Sig. Simplicio nel credere, che questa sia una proposta difficile da capirsi, e bisognosa di prova; però con poca fatica noi la dimostreremo così.

Se li quattro termini delle due proporzioni non fossero in linee, ma in altre grandezze, immaginiamoci che e' sieno posti in linee rette. (1) Facciasi poi delle due antecedenti A, C (Fig. XLI.) un rettangolo siccome delle due conseguenti B, D un altro rettangolo. È chiaro per la 23 del sesto d'Euclide, che il rettangolo fatto dalle A, C al rettangolo dalle B, D averà quella proporzione, che è composta delle due proporzioni A verso B, e C verso D, le quali son queste due, che ponemmo da

(1) *Qui si suppone sapersi quali sieno le quantità delle proporzioni, e come s'intenda il multiplicarle fra loro, ma il tutto meglio apparisce dal construire, e dimostrare la presente proposizione.*

principio affine di ritrovare qual fosse la proporzione che risultava dalla comparazione di esse. Essendo dunque la proporzione composta delle proporzioni A verso B, e C verso D quella, che ha il rettangolo A C al rettangolo B D, per la suddetta proposizion 23 del sesto, io domando al Signor Simplicio, come abbiamo noi fatto per ritrovare questi due termini, ne' quali consiste la proporzione, che si cercava da noi?

Simp. Io non credo, che non si sia fatto altro, se non formar due rettangoli con quelle quattro linee poste da principio, uno cioè colle antecedenti A, C, e l'altro colle conseguenti B, D.

Salv. Ma la formazione de' rettangoli nelle linee della Geometria corrisponde per appunto alla multiplicazione de' numeri nell' Arimmetica, come sa ogni Matematico anche principiante, e le cose che noi abbiamo multiplicate sono state le linee A, C, e le linee B, D, cioè i termini omologhi delle poste proporzioni.

Ecco dunque, come multiplicando insieme le quantità, o le valute delle date proporzioni semplici, si produce la quantità, o la valuta della proporzione, la quale poi si chiama composta di quelle.

GIORNATA SESTA
DEL GALILEO
DELLA FORZA DELLA PERCOSSA

Da aggiugnersi ai discorsi, e alle dimostrazioni Matematiche intorno alle due nuove scienze appartenenti alle meccaniche, ed ai movimenti locali.

INTERLOCUTORI.

Salviati, Sagredo, e Aproino.

Sagr. L'Assenza di V. S. Sig. Salviati, di questi quindici giorni mi ha dato campo di poter vedere le proposizioni attenenti a' centri di gravità de' solidi, ed anco dare un'altra diligente lettura alle dimostrazioni delle tante, e sì nuove proposizioni de' moti na-

turali, e violenti, e perchè ne sono tra esse non poche di assai difficile apprensione, di speziale ajuto mi è stata la conferenza di questo gentiluomo, che V. S. qui vede.

Salv. Io voleva appunto domandar V. S. dell'essere appresso di lei questo Signore, e del mancarne il nostro Sig. Simplicio.

Sagr. Dell'assenza del Sig. Simplicio mi vo immaginando, anzi lo tengo per fermo, che cagione ne sia stata la grande oscurità, che egli ha incontrata in alcune dimostrazioni di varj problemi attenenti al moto, e più di altre sopra le proposizioni del centro di gravità Parlo di quelle, che per lunghe concatenazioni di varie proposizioni degli elementi della Geometria vengono inapprensibili a quelli, che tali elementi non hanno prontissimi alle mani; questo gentiluomo, che qui vede, è il Sig. Paolo Aproino, nobile Trivisano, stato non solamente uditore del nostro Accademico, mentre lesse in Padova, ma suo intrinsechissimo familiare, e di lunga, e continuata conversazione, nella quale insieme con altri (tra' quali fu principalissimo il Sig. Daniello Antonini nobilissimo d'Udine, d'ingegno, e di valore sopraumano, il quale per difesa della Patria, e del suo Serenissimo Principe, gloriosamente morì, ricevendo onori condegni al suo merito dalla Serenissima Repubblica Veneta) intervenne in particolare a gran numero di

esperienze; che intorno a diversi problemi in casa esso Accademico si facevano. Ora essendo circa dieci giorni fa venuto questo Sig. a Venezia, e conforme al suo solito a visitarmi, sentendo come aveva appresso di me questi trattati del comune amico, ha preso gusto, che gli vediamo insieme, e sentendo l'appuntamento del ritrovarci a parlare sopra il maraviglioso problema della percossa, mi ha detto come ne aveva più volte discorso, ma sempre irresolutamente, ed ambiguamente con esso Accademico, col quale mi diceva, che si era trovato, nel far diverse esperienze attenenti a varj problemi, a farne ancora alcune riguardanti alla forza della percossa, ed alla sua esplicazione, ed ora appunto stava in procinto di arrecarne tra l'altre una, per quanto egli dice, assai ingegnosa, e sottile.

Salv. Io mi reputo a gran ventura l'essermi incontrato nel Sig. Aproino, ed il poterlo conoscere di vista, e di presenza, come per fama, e per molte relazioni del nostro Accademico già aveva conosciuto, e di sommo piacere mi sarà il poter sentire almeno parte delle varie esperienze, che sopra diverse proposizioni furon fatte in casa l'amico nostro coll'intervento d'ingegni così accurati, quali sono quelli del Sig. Aproino, e del Sig. Antonini, del quale con tante lodi, ed ammirazioni mille volte mi parlò detto amico nostro. E per-

chè siamo ora qui per discorrere sopra il particolare della percossa, potrà V. S. Signor Aproino dirci quello, che in tal materia ne trassero dalle esperienze, con promessa però di arrecarne con altra occasione altre fatte sopra altri problemi, che so che non glie ne mancheranno, per la sicurezza che ho dell'essere l'Accademico nostro stato sempre non meno curioso, che diligente sperimentatore.

Apr. Se io volessi con i debiti ringraziamenti pagare il debito, al quale la cortesia di V. S. mi obbliga, mi converrebbe spendere tante parole, che poco tempo, o punto ci avanzerebbe di tutto il giorno, per parlare dell'intrapresa materia.

Sagr. No no, Sig. Aproino, venghiamo pure a dar principio ai discorsi di dottrina, e lasciamo i complimenti di cerimonie ai cortigiani, ed io entro per sicurtà tra amendue loro della scambievole soddisfazione prodotta, per quanto basta, dalle brevi, ma candide, e sincere loro ofiziose parole.

Apr. Ancorchè io stimi di non essere per produr cosa ignota al Sig. Salviati e che perciò tutta la carica del discorso doverebbe essere appoggiata sulle sue spalle, tuttavia se non per altro, almeno per alleggerirlo in parte, andrò toccando quei primi motivi insieme colla prima esperienza, che mossero l'amico ad internarsi nella contemplazione di questo ammirabile

problema della percossa. Cercando la maniera del poter trovare, e misurare la sua gran forza, ed insieme, se fusse possibile, risolvere ne' suoi principj, e nelle sue prime cause l'essenza di cotale effetto, il quale molto diversamente par che proceda nell'acquisto della sua somma potenza, dal modo, nel quale procede la moltiplicazione di farla in tutte le altre macchine meccaniche (dico meccaniche, per escludere l'immenso vigore del fuoco) nelle quali si scorge, ed assai concludentemente s'intende, come la velocità d'un debile movente compensa la gagliardia di un forte resistente, che lentamente venga mosso. Ma perchè si scorge pur anco nella operazione della percossa intervenire il movimento del percuziente, congiunto colla sua velocità, contro al movimento del resistente, ed il suo poco, o molto dovere essere mosso; fu il primo concetto dell'Accademico di cercar d'investigare qual parte abbia nell'effetto, ed operazione della percossa v. gr. il peso del martello, e quale la velocità maggiore, o minore, colla quale vien mosso, cercando se fusse possibile di trovare una misura, la quale comunemente ci misurasse, ed assegnasse l'una, e l'altra energia. E per arrivare a tal cognizione s'immaginò, per quanto a me parve, una ingegnosa esperienza. Accomodò un'asta assai gagliarda, e di lunghezza di circa tre braccia, volubile sopra un per-

no a guisa dell'ago di una bilancia; sospese poi nell'estremità delle braccia di cotal bilancia due pesi eguali, ed assai gravi, uno de' quali era il composto di due vasi di rame, cioè di due secchie, l'una delle quali appesa all'estremità detta dell'ago si teneva piena d'acqua, e dalle orecchie di tale secchia pendevano due corde di lunghezza circa due braccia l'una, alle quali era per gli orecchi attaccata un'altra simil secchia, ma vuota, la quale veniva a piombo a risponder sotto alla prima secchia già detta, e piena d'acqua; nell'estremo poi dell'altro braccio della bilancia si faceva pendere un contrappeso di pietra, o di qual si fusse altra materia grave, il quale equilibrasse giustamente la gravità di tutto il composto delle due secchie dell'acqua, e delle corde. La secchia superiore era forata nel fondo con foro largo alla grossezza di un uovo, o poco meno, e questo tal foro si poteva aprire, e serrare. Fu la prima immaginazione, e concetto comune di amendue noi, che fermata la bilancia in equilibrio, essendo preparato il tutto nella maniera detta, quando poi si sturasse la secchia superiore, e si desse l'andare all'acqua, la quale precipitando andasse a percuotere nella secchia da basso, l'aggiunta di cotal percossa dovesse aggiugnere tal momento in questa parte, che bisogno fusse per restituire l'equilibrio aggiugnere nuovo peso alla gra-

vità del contrappeso dell' altro braccio, la quale aggiunta è manifesto, che ristorerebbe, e adeguerebbe la nuova forza della percossa dell' acqua; sicchè potessimo dire, essere il suo momento equivalente al peso delle 10, o 12 libbre, che fusse stato di bisogno aggiugnere all' altro contrappeso.

Sagr. Ingegnoso veramente mi pare cotesto macchinamento, e sto con avidità attendendo l' esito di tale esperienza.

Apr. La riuscita siccome agli altri fu inopinata, così fu maravigliosa; imperocchè subito aperto il foro, e cominciato ad uscirne l' acqua, la bilancia inclinò dall' altra parte del contrappeso, ma non tantosto arrivò l' acqua percuotendo nel fondo dell' inferior secchia, che restando di più inclinarsi il contrappeso, cominciò a sollevarsi, e con un moto placidissimo, mentre l' acqua precipitava, si ricondusse all' equilibrio, e quivi senza passarlo pur di un capello, si librò, e fermossi perpetuamente.

Sagr. Inaspettato veramente m' è stato l' esito di questo caso, e benchè il successo sia stato diverso da quello, che io mi aspettava, e dal quale pensava di potere imparare, quanta fosse la forza di tal percossa nulladimeno mi par potere conseguire in buona parte la desiderata notizia, dicendo che la forza, ed il momento di cotal percossa equivale al momento, ed al

peso di quella quantità d'acqua cadente, che si trova sospesa in aria tra le due acque delle due secchie, superiore, ed inferiore, la qual quantità d'acqua non gravita punto, nè contro alla secchia superiore, nè contro all'inferiore; non contro alla superiore, perchè non essendo le parti dell'acqua attaccate insieme, non possono le basse far forza, e tirar giù le superiori, come farebbe v. gr. una materia viscosa, come pece, o pania; non contro all'inferiore, perchè andandosi continuamente accelerando il moto della cadente acqua, non possono le parti più alte gravitare, o premere sopra le più basse, laonde ne segue, che tutta l'acqua contenuta nella troscia è come se non fusse in bilancia. Il che anco più che chiaramente si manifesta, perchè se tal acqua esercitasse sua gravità sopra le secchie, queste colla giunta della percossa grandemente inclinerebbero a basso, sollevando il contrappeso, il che non si vede seguire. Confermasi anco puntualissimamente questo, perchè se noi ci immagineremo tutta quell'acqua repentinamente agghiacciarsi; già la troscia fatta un solido di ghiaccio peserebbe con tutto il resto della macchina, e cessando il moto, verrebbe tolta la percossa.

Apr. Il discorso di V. S. è puntualmente conforme a quello, che facemmo noi di subito sopra la veduta esperienza, ed a noi ancora parve di poter concludere,

che l'operazione della sola velocità acquistata per la caduta di quella quantità d'acqua dall'altezza delle due braccia, operasse nell'aggravare senza il peso dell'acqua quel medesimo appunto, che il peso dell'acqua senza l'impeto della percossa, sicchè quando si potesse misurare, e pesare la quantità dell'acqua compresa in aria tra i vasi si potesse sicuramente affermare, la tal percossa esser potente ad operare gravitando quello che opera un peso eguale a 10, o 12 libbre dell'acqua cadente.

Salv. Piacemi molto l'arguta invenzione, e parmi, che senza il partirci dal suo progresso, nel quale ci arreca qualche ambiguità la difficoltà del misurare la quantità dell'acqua cadente, potremmo con una non dissimile esperienza agevolarci la strada per arrivare all'intera cognizione, che desideriamo. Però figurandoci per esempio uno di quei gran pesi, che per ficcare grossi pali nel terreno si lasciano cadere da qualche altezza sopra uno de' detti pali (i quali pesi mi pare, che gli addimandino berte) ponghiamo v. gr. il peso di una tal berta esser 100 libbre, l'altezza, dalla quale cade, essere quattro braccia, e la fitta del palo nel terreno duro fatta per una sola percossa importare 4 dita, e posto che la medesima pressura, e fitta delle 4 dita, volendola noi far senza percossa, ricercasse, che le fusse soprapposto un peso di mille libbre, il quale operando

colla sola gravità senza moto precedente, chiameremo peso morto, domando se noi potremo senza equivocazione, o fallacia affermare, la forza, ed energia di un peso di 100 libbre congiunto colla velocità acquistata nel cadere dall' altezza di quattro braccia, essere equivalente al gravitare di un peso morto di mille libbre: sicchè la virtù della sola velocità importasse, quanto la pressura di libbre novecento di peso morto, che tante ne rimangono, trattene dalle mille le cento della berta? Vedo, che amendue tardate la risposta, forse perchè bene non ho esplicata la mia domanda; però torno a brevemente dire, se possiamo per la detta sperienza asserire, che l' aggravio del peso morto farà sempre il medesimo effetto sopra una resistenza, che fa il peso di 100 libbre cadente dall'altezza di quattro braccia, in guisa tale, che (per più chiara esplicazione) cadendo l' istessa berta dalla medesima altezza, ma percuotendo sopra un più resistente palo, non lo cacciasse più che due dita, se possiamo tenerci sicuri, che l' istesso effetto facesse solo col gravitare il peso morto delle mille libbre; dico di cacciare il palo le due dita?

Apr. Io non penso, che almeno a prima fronte ciò non fusse conceduto da ciascheduno.

Salv. E voi, Signor Sagredo, ci mettereste sopra qualche dubbio?

Sagr. Per ora veramente no, ma l'avere per molte, e molte esperienze provato quanto sia facile l'ingannarsi, non mi rende così baldanzoso, che del tutto mi spogli di timore.

Salv. Ora poi che V. S. la cui perspicacia ho in mille e mille occasioni conosciuta acutissima, si mostra inclinare ad ammettere la parte falsa, ben posso credere, tra mille difficile sarebbe d'incontrarne uno, o due, che in una fallacia tanto simile al vero non incappassero. Ma quello, che più vi farà maravigliare, sarà quando vedrete la fallacia esser sotto così sottil velo ricoperta, ch'ogni legger vento poteva esser bastante a discoprirla, e palesarla, e pure ne resta ella velata, e ascosa. Torniamo dunque a far cadere nel primo modo sopraddetto la berta sul palo, cacciandolo sotto quattro dita, e sia vero, che per ciò fare si ricercassero puntualmente le mille libbre di peso morto, torniamo di più a sollevare alla medesima altezza l'istessa berta, la quale cadendo la seconda volta sopra il medesimo palo, lo cacci solamente due dita, per avere v. gr. incontrato il terreno più sodo, dobbiamo noi stimare, che altrettanto lo ricacciasse la pressura dell'istesso peso morto delle mille libbre?

Apr. Parmi che sì.

Sagr. Ah Sig. Paolo, miseri noi; bisogna dire risolutamente, che no; imperoc-

chè se nella prima posata il peso morto delle mille libbre cacciò il palo quattro dita, e non più, perchè volete, che l'averneclo tolto solamente, e poi rimessoglielo sopra, torni a cacciarlo due altre dita? e perchè non lo cacciò prima che ne fusse levato, mentre già gli era addosso? Volete, che lo smontarlo solamente, e riposatamente riporvelo, gli faccia fare quello, che prima non potette?

Apr. Io non posso se non arrossire, e dichiararmi d'essere stato in pericolo di sommergermi in un bicchier d'acqua.

Salv. Non vi sbigottite, Sig. Aproino, perchè vi assicuro, che avete avuto molti compagni in rimanere allacciato in nodi per altro di facilissima scioglitura; e non è dubbio, che ogni fallacia sarebbe per sua natura d'agevole scoprimento, quando altri ordinatamente l'andasse sviluppando, e risolvendo ne' suoi principj, de' quali esser non può, che alcun suo contiguo, o poco lontano non si scopra apertamente falso. Ed in questa parte di ridurre con pochissime parole ad assurdi, ed inconvenienti palpabili conclusioni false, e state sempre credute per vere, ha il nostro Accademico avuto certo particolar genio. Ed io ho una raccolta di molte, e molte conclusioni naturali, state sempre trapassate per vere, e da esso poi con brevi, e facilissimi discorsi manifestate false.

Sagr. Questa veramente ne è una, e se l'altre saranno su questo andare, sarà bene, che a qualche tempo ce le partecipiate, ma intanto per ora seguitiamo l'intrapresa materia. Ed essendo che noi siamo sul cercare il modo (se alcuno ve ne ha) di regolare ed assegnare misura giusta e nota alla forza della percossa, questo non mi par, che conseguir si possa col mezzo dell'assegnata sperienza. Imperocchè reiterando i colpi della berta sopra il palo, e per ciascheduno ricacciandolo continuamente più e più, come la sensata esperienza ne mostra, si fa chiaro, che ciascheduno de' conseguenti colpi lavora; il che non accade nel peso morto, il quale avendo operato quello, che fece la prima pressura, non seguita di fare l'effetto della seconda, cioè di cacciare ancor di nuovo il palo, quando vi si riponga sopra: anzi apertamente si vede, che per la seconda rifitta ci vuol peso maggiore di mille libbre, e se si vorranno pareggiare con pesi morti le fitte del terzo, quarto, e quinto colpo, ec. ci vorranno le gravità di pesi morti continuamente maggiori, e maggiori: or quale di queste doveremo noi prender per ferma, e certa misura della forza del colpo, che pur quanto a se stesso è sempre il medesimo?

Salv. Questa è delle prime maraviglie, che indubitabilmente credo, che debbano avere tenuti perplessi, ed irresoluti gl'in-

gegni speculativi. E veramente a chi non giugnerà nuovo il sentire, che la misura della forza della percossa si debba prendere non da quello, che percuote, ma più presto da quello, che la percossa riceve? E quanto all' addotta esperienza pare, che da lei ritrar si possa la forza della percossa essere infinita, o vogliamo dire indeterminata, o indeterminabile, e farsi ora minore, ed ora maggiore, secondo che ella viene applicata ad una maggiore, o minore resistenza.

Sagr. Già mi pare di comprendere, che vero possa essere la forza della percossa essere immensa, o infinita; imperocchè stando nella proposta esperienza, e dato che il primo colpo cacciasse il palo quattro dita, e il secondo tre, e continuandosi d' incontrare sempre il terreno più duro, il colpo terzo vi cacci il palo due dita, il quarto uno, e mezzo, conseguentemente un sol dito, un mezzo, un quarto, ec. pare, che quando per la durezza del terreno la resistenza del palo non si faccia infinita, che il colpo reiterato sempre caccierà perpetuamente il palo, ma bene per ispazj minori e minori: ma perchè quanto si voglia lo spazio sia breve, è egli però divisibile, e suddivisibile sempre, si continueranno le fitte, e perchè la seguente dovendosi fare coll' aggravio di peso morto richiede peso maggiore, che l'antecedente, potrà essere, che per pareggia-

re le forze dell' ultime percosse si ricerchi peso maggiore e maggiore in immenso.

Salv. Così crederei io veramente.

Apr. Non potrà dunque essere resistenza alcuna così grande, che resti salda, e contumace contro al potere di alcuna percossa benchè leggera?

Salv. Penso di no, se quello in che si percuote non è del tutto immobile, cioè non è la sua resistenza infinita.

Sagr. Mirabili, e per modo di dire prodigiosi pajono questi asserti, e che l'arte in questo solo effetto superi, e defraudi la Natura, cosa che nella prima apparenza par che facciano altri strumenti meccanici ancora, alzandosi gravissimi pesi con poca forza in virtù della leva, della vite, della taglia, ed altri: ma in questo effetto della percossa, che pochi colpi di martello non più pesante di 10, o 12 libbre abbiano ad ammaccare v. g. un dado di rame, il quale non infragnerebbe, nè ammaccherebbe il carico non solo di una vastissima guglia di marmo, ma nè anco una torre altissima, che sopra il martello si posasse, eccede, pare a me, ogni natural discorso, che tentasse di torne la maraviglia, però Sig. Salv. mettete mano al filo, e cavateci di così intrigati laberinti.

Salv. Da quanto essi producono pare, che il nodo principale della difficoltà batta qua, che non bene si comprenda come

l' operazione della percossa, che sempre infinita, non debba di necessità procedere per mezzi diversi da quelli di altre macchine, che con pochissima forza superano resistenze immense. Tuttavia io non dispero di poter esplicare, come in questa ancora si procede nella medesima maniera. Tenterò di spiegarne il progresso; e benchè mi paja assai complicato, forse il mio dire potrebbe dal vostro dubitare, ed opporre assottigliarsi ed acuirsi tanto, che allargasse almeno, se non del tutto sciogliesse il nodo. E manifesto la facultà della forza del movente, e della resistenza del mosso non essere una e semplice, ma composta di due azioni, dalle quali la loro energia dee essere misurata; l' una delle quali è il peso sì del movente, come del resistente, e l' altra è la velocità, secondo la quale quello dee muoversi, e questo esser mosso. E così quando il mosso dee muoversi colla velocità del movente, cioè che gli spazj passati da amendue nell' istesso tempo sieno eguali, impossibile sarà, che la gravità del movente sia minore di quella del mosso, ma sibbene alquanto maggiore, attesochè dalla puntuale egualità nasce l' equilibrio, e la quiete, come si vede nella bilancia di braccia eguali. Ma se noi vorremo con peso minore sollevarne un maggiore, bisognerà ordinar la macchina in modo, che il peso movente minore si mo-

va nell' istesso tempo per ispazio maggiore dell' altro peso, che è quanto a dire, che quello più velocemente si muova di questo; e così di già la ragione, non meno che l' esperienza ci mostra, che per esempio nella stadera acciocchè il peso del romano possa alzare un altro 10, o 15 volte di lui più grave, bisogna, che la sua lontananza nell' ago, sia lontana dal centro, intorno al quale si fa il moto 10, o 15 volte più, che la distanza tra il medesimo centro, ed il punto della sospensione dell' altro peso; che è il medesimo, che dire, che la velocità del movente sia 10, o 15 volte maggiore della velocità del mosso. E perchè questo si scorge accadere in tutti gli altri strumenti, possiamo con sicurezza stabilire, che le gravità, e velocità coll' istessa proporzione, ma alternatamente prese si rispondano. Generalmente dunque diciamo il momento del men grave pareggiare il momento del più grave, quando la velocità del minore alla velocità del maggiore abbia l' istessa proporzione, che la gravità del maggiore a quella del minore, al quale ogni poco vantaggio, che si conceda, supera l' equilibrio, e si introduce il moto. Fermato questo, io dico, che non solamente nella percossa la sua operazione pare infinita circa il superare qualsivoglia somma resistenza, ma tale si mostra ella in qualsivoglia altro meccanico ordigno; perchè non è egli manifesto, che un piccolissimo

peso di una libbra scendendo alzerà un peso di 100, e di 1000, e più quanto ne piace, se noi lo costituiremo nell' ago della stadera cento o mille volte più lontano dal centro, che l' altro peso massimo, cioè se noi faremo, che lo spazio, per lo quale scenderà quello, sia cento, e mille, e più volte maggiore dello spazio della salita, dell' altro, cioè se la velocità di quello sia cento, e mille volte maggiore della velocità di questo? Ma voglio con uno più arguto esempio farli toccar con mano, come qualsivoglia piccolissimo pese scendendo faccia salire qualsivoglia immensa e gravissima mole. Intenda V. S. un tal vastissimo peso essere attaccato a una corda fermata in luogo stabile, e sublime, intorno al quale, come centro, intenda esser descritta la circonferenza di un cerchio, che passi pel centro di gravità della sospesa mole, il qual centro di gravità è noto, che viene a perpendicolo sotto la corda della sospensione, o per meglio dire, è in quella retta linea, che dal punto della sospensione va a terminare nel centro comune di tutti i gravi, cioè nel centro della Terra. Immaginatevi poi un altro filo sottilissimo, al quale sia attaccato qualsivoglia peso benchè minimo, in guisa che il centro di gravità di questo termini nella già immaginata ciroonferenza; e ponete questo piccolo peso andare a toccare, e semplicemente appoggiarsi a quella vasta mole, non credete voi, che aggiunto

per fianco questo nuovo peso spignerà alquanto quel massimo, separando il suo centro di gravità dalla già immaginata linea perpendicolare, nella quale prima si trovava, e senza dubbio si muoverà per la circonferenza già detta, e movendovisi si separerà dalla linea orizzontale, che è la tangente della detta circonferenza nell' imo punto, dove si trovava esso centro di gravità della gran mole? E quanto allo spazio tanto sarà l' arco passato dal gravissimo, quanto il passato dal piccolissimo peso, che al grandissimo si appoggiava; ma non sarà già la salita del centro del peso massimo eguale alla scesa del centro del peso minimo, perchè questo scende per un luogo, o spazio molto più inclinato, che non è quello della salita dell' altro centro, che vien fatta dal contatto del cerchio in certo modo, secondo un angolo minore di ogni acutissimo. Qui se io avessi a trattare con persone men versate di voi nella Geometria, dimostrerei, come partendosi un mobile dall' imo punto del contatto, può benissimo essere, che l' alzamento dalla linea orizzontale di qualche punto della circonferenza separato dal contatto, sia secondo qualsivoglia proporzione minore dell' abbassamento di un asse a questo eguale, preso in qualsivoglia altro luogo, purchè in esso non si contenga il contatto. Ma voi son sicuro, che in ciò non avete dubbio. E se il semplice appoggiarsi del piccol peso alla

gran mole può muoverla, ed alzarla, che sarà se discostandolo, e lasciandolo scorrere per la circonferenza egli vi anderà a percuotere?

Apr. Veramente non mi pare, che ci resti più luogo di dubitare, la forza della percossa essere infinita per quanto l'addotta esperienza ne dichiara; ma tal notizia non basta al mio intelletto a schiarirmi molte oscure tenebre, le quali lo tengono offuscato in modo, che non discerno come il negozio di queste percosse cammini, sicchè io potessi rispondere ad ogni dubbio, che mi fusse promosso.

Salv. Ma prima che io passi più oltre, voglio scoprirvi un certo equivoco, che sta nascoso, e come in aguato, e ci lascia stimare tutti quei colpi, con i quali nel soprapposto esempio si andava cacciando il palo, esser eguali, o vogliamo dire gl'istessi, sendo fatti dalla medesima berta elevata sopra il palo sempre alla medesima altezza, il che non è vero. Per intelligenza di che, figuratevi di andare ad incontrare colla mano una palla, che venga scendendo da alto, e ditemi, se nell'arrivare ella sopra la vostra mano, voi la mano andaste abbassando per la medesima linea, e colla medesima velocità, che scende la palla, ditemi, dico, qual percossa voi sentireste? certo nessuna. Ma se all'arrivo della palla voi andaste solamente in parte cedendo, con abbassar la mano con minor

velocità di quella della palla, voi bene riceverreste percossa, ma non come da tutta la velocità della palla, ma solamente come dall' eccesso della velocità di quella sopra la velocità della cedenza della mano, sicchè quando la palla scendesse con 10 gradi di velocità, e la mano cedesse con otto, il colpo sarebbe come fatto da due gradi di velocità della palla, e cedendo la mano con 4 il colpo sarebbe come di 6, ed essendo il cedere come uno, il percuotèr sarebbe come di 9, e tutta l' intera percossa della velocità de' 10 gradi sarebbe quella, che percotesse sopra la mano, che nulla cedesse. Applicando ora il discorso alle percosse della berta, mentre il palo cede la prima volta 4 dita, e la seconda 2, e la terza un sol dito all' impeto della berta, le percosse rimangono disuguali, e la prima più debole della seconda, e la seconda più della terza, secondo che la cedenza della 4 dita più detrae dalla velocità del primo colpo, che la seconda, e questa è più debole della terza, come quella, che toglie il doppio più di questa dalla medesima velocità. Se dunque il molto cedere del palo alla prima percossa, ed il meno cedere alla seconda, e meno anco alla terza, e così sempre continuatamente, è cagione, che men valido sia il primo colpo del secondo, e questo del terzo, che maraviglia è, che manco quantità di peso morto si ricerchi per la prima cacciata del-

le 4 dita, e che maggiore ne bisogni per la seconda cacciata delle due dita, e maggiore ancora per la terza, e sempre più e più continuatamente, secondo che le cacciate si vanno diminuendo nelle diminuzioni delle cedenze del palo, che è quanto a dire nell' augumento delle resistenze? Da quanto ho detto mi pare, che agevolmente si possa raccorre, quanto malagevolmente si possa determinare sopra la forza della percossa fatta sopra un resistente, il quale vada variando la cedenza, quale è il palo, che indeterminatamente va più e più resistendo: laonde stimo, che sia necessario, l' andar contemplando sopra tale, che ricevendo le percosse a quelle sempre colla medesima resistenza si opponga. Ora per istabilire tal resistente, voglio, che ci figuriamo un solido grave per esempio di mille libbre di peso, il quale posi sopra un piano, che lo sostenti; voglio poi, che intendiamo una corda a cotal solido legata, la quale cavalchi sopra una carrucola fermata in alto per buono spazio sopra detto solido. Qui è manifesto, che aggiugnendo forza traente in giù all' altro capo della corda, nel sollevar quel peso si averà sempre una egualissima resistenza, cioè il contrasto di mille libbre di gravità; e quando da quest' altro capo si sospenda un altro solido egualmente pesante come il primo, verrà da essi fatto l' equilibrio, e stando sollevati, senza che sopra alcuno sottoposto sostegno si appog-

girio, staranno fermi, nè scenderà questo secondo grave alzando il primo, salvo che quando egli abbia qualche eccesso di gravità. E se riposeremo il primo peso sopra il soggetto piano, che lo sostenga, potremo far prova con altri pesi di diversa gravità (ma ciascheduna minore del peso, che riposa in quiete) quali siano le forze di diverse percosse, con legare alcuno di questi pesi all'altro capo della corda, lasciandolo da qualche altezza cadere, ed osservando quello, che segue nell'altro gran solido nel sentir la strappata dell'altro peso cadente, la quale strappata sarà ad esso gran peso come un colpo, che lo voglia cacciare in su. Qui primieramente mi pare, che si raccolga, che per piccola che sia la gravità del peso cadente, doverà senz'altro superare la resistenza del peso gravissimo, ed alzarlo, la qual conseguenza mi par, che si tragga molto concludentemente dalla sicurezza, che abbiamo, come un peso minore prevalerà ad un altro quanto si voglia maggiore, qualunque volta la velocità del minore abbia maggior proporzione alla velocità del maggiore, che non ha la gravità del maggiore alla gravità del minore: ma ciò segue nel presente caso, nel quale la velocità del peso cadente supera d'infinito intervallo quella dell'altro peso, la quale è nulla, posando egli in quiete: ma non già è nulla la gravità del solido cadente, in relazione alla gravità dell'altro,

non ponendo noi questa infinita, nè quella nulla: supererà dunque la forza di questo percuziente la resistenza di quello, in cui si impiega la percossa. Seguita ora, che cerchiamo d'investigare, quanto sia per essere lo spazio, al quale la ricevuta percossa lo solleverà; e se forse questo risponda a quello degli altri strumenti meccanici, come per esempio nella stadera si vede l'alzamento del peso grave esser quella tal parte dello abbassamento del romano, quale è il peso del romano dell'altro peso maggiore, e così nel caso nostro bisogna, che vediamo, se essendo la gravità del gran solido posto in quiete, per esempio, mille volte maggiore della gravità del peso cadente, il quale caschi dall'altezza v. g. di un braccio, egli sia alzato da questo minore un centesimo di braccio, che così pare, che venisse osservata la regola degli altri strumenti meccanici. Figuriamoci di fare la prima esperienza, col far cadere da qualche altezza, diciamo di un braccio un peso eguale all'altro, che ponghiamo posare sopra un piano, essendo amendue tali pesi legati, l'uno all'un capo, e l'altro all'altro capo dell'istessa corda; che crediamo noi, che sia per operare la strappata del peso cadente circa il muovere, e sollevar l'altro, che era in quiete? Io volentieri sentirei l'opinione vostra.

Apr. Poichè V. S. guarda verso di me, comecchè da me ella attenda la rispo-

sta, mi pare che essendo ambedue i solidi egualmente gravi, ed avendo il cadente di più l'impeto della velocità, l'altro ne dovrà esser innalzato assai sopra l'equilibrio; imperocchè per ridurlo in bilancio la sola gravità di quello era bastante; sormonterà dunque per mio credere il peso ascendente per molto maggiore spazio di un braccio, che è la misura della scesa del cadente.

Salv. Che dice V. S. Sig. Sagredo?

Sagr. Il discorso mi pare assai concludente nel primo aspetto, ma, come poco fa dissi, le molte esperienze mi hanno insegnato, quanto sia facile l'ingannarsi, e però quanto sia necessario l'andar circospetto prima che risolutamente pronunziare, ed affermare alcun detto. Dirò dunque (però sempre dubitando) che è vero, che il peso v. g. delle 100 libbre del grave descendente basta per alzare l'altro, che pure pesi 100 libbre insino allo equilibrio, senza che quello venga instrutto e fornito d'altra velocità, e basterà solo l'eccesso di mezza oncia, ma vo considerando, che questa equilibrazione verrà fatta con gran tardità; dove che quando il cadente sopraggiunga con gran velocità, con una simile bisognerà, che tiri in alto il suo compagno; ora non mi pare, che sia dubbio, che maggior forza ci voglia a cacciar con gran velocità un grave all'in su, che a spingnervelo con gran lentezza: onde possa

accadere, che il vantaggio della velocità guadagnata dal cadente nella libera caduta in un braccio, possa rimaner consunto, e per modo di dire, spento nel cacciar l'altro con altrettanta velocità ad altrettanta altezza, perlochè non sarei lontano dal credere, che tali due movimenti in giù, ed in su terminassero in quiete immediatamente dopo la salita di un braccio, che sarebbero due braccia di scesa dell' altro, computandovi il primo braccio, che questo scese libero e solo.

Salv. Io veramente inclino a credere questo stesso, perchè sebbene il peso cadente è un aggregato di gravità e di velocità, l'operazione della gravità nel sollevar l' altro è nulla, avendo a se opposta e renitente altrettanta gravità dell'altro peso, il quale è manifesto, che mosso non sarebbe senza l' aggiunta all' altro di qualche piccola gravità: l' operazion dunque, per la quale il peso cadente dee sollevar l' altro, è tutta della velocità, la quale altro che velocità non può conferire; nè potendo conferirne altra, che quella, che egli ha, e non avendo altra, che quella, che partendosi dalla quiete ha guadagnata nello spazio della scesa di un braccio; per altrettanto spazio, e con altrettanta velocità spignerà l' altro all' in su, conformandosi con quello, che in varie esperienze si può riconoscere, che è, che il grave cadente partendosi dalla quiete si trova in ogni sito aver tant' impeto, che basta per ridur se stesso alla medesima altezza.

Sagr. In quel modo, che ora mi sovviene accadere in un grave pendente da un filo, che sia fermato in alto, il qual grave rimosso dal perpendicolo per un arco di qualsivoglia grandezza, non maggiore di una quarta, lasciato in libertà scende, e trapassa oltre al perpendicolo, salendo altrettanto arco quanto fu quello della scesa; dove è manifesto la salita derivar tutta dalla velocità appresa nello scendere; imperocchè nel montare in su, niuna parte vi può avere la gravità del mobile, ma bene repugnando questa alla salita, va spogliando esso mobile di quella velocità, della quale nella scesa lo veste.

Salv. Se l'esempio di quello, che fa il solido grave appeso al filo, del quale mi sovviene, che parlammo ne' discorsi dei giorni passati, quadrasse, e si aggiustasse così bene al caso, del quale noi di presente trattiamo, come ei si aggiusta alla verità, molto concludente sarebbe il discorso di V. S. ma non piccola discrepanza trovo io tra queste due operazioni, dico tra quella del solido grave pendente dal filo, che lasciato da qualche altezza, scendendo per la circonferenza del cerchio, acquista impeto di trasportare se medesimo ad altrettanta altezza: e l' altra operazione del cadente legato ad un capo della corda per innalzare l' altro a se eguale in gravità; imperocchè lo scendente per lo cerchio va acquistando velocità sino al perpendico-

lo favorito dalla propria gravità, la quale trapassato il perpendicolo lo disajuta nel dovere ascendere, (che è moto contrario alla gravità) sicchè dello impeto acquistato nella scesa naturale, non piccola ricompensa è il ricondurlo con moto perternaturale, o per altezza. Ma nell' altro caso sopraggiugne il grave cadente al suo eguale posto in quiete, non solamente colla velocità acquistata, ma colla sua gravità ancora, la quale mantenendosi leva per se sola ogni resistenza di essere alzato all' altro suo compagno, perlochè la velocità acquistata non trova contrasto di un grave, che allo andare in su faccia resistenza, talchè se come l'impeto conferito all' ingiù ad un grave non trova in esso ragione di annichilarsi, o ritardarsi, così non si ritrova in quello ascendente, la cui gravità rimane nulla, essendo contrappesata da altrettanta descendente. E qui mi pare, che accada per appunto quello, che accade ad un mobile grave, e perfettamente rotondo, il quale se si porrà sopra un piano pulitissimo, ed alquanto inclinato, da per se stesso naturalmente vi scenderà, acquistando sempre velocità maggiore; ma se per l' opposito dalla parte bassa si vorrà quella cacciare in su, ci bisognerà conferirgli impeto, il quale si anderà sempre diminuendo, e finalmente annichilando; ma se il piano non sarà inclinato, ma orizzontale, tal solido rotondo postovi so-

pra farà quello, che piacerà a noi, cioè se ve lo metteremo in quiete, in quiete si conserverà, e dandogli impeto verso qualche parte, verso quella si moverà, conservando sempre l'istessa velocità, che dalla nostra mano averà ricevuta, non avendo azione nè di accrescerla, nè di scemarla, non essendo in tal piano nè declività, nè acclività., ed in simile guisa i due pesi eguali pendenti da due capi della corda ponendogliene in bilancio, si quieteranno, e se ad uno si darà impeto all'ingiù, quello si andrà conservando equabile sempre. E qui si dee avvertire, che tutte queste cose seguirebbero, quando si rimovessero tutti gli esterni, ed accidentari impedimenti, dico di asprezza, e gravità di corda, di girelle, e di stroppicciamenti nel volgersi intorno al suo asse, ed altri, che ve ne potessero essere; ma perchè si è fatta considerazione della velocità, la quale l'uno de' due pesi eguali acquista scendendo da qualche altezza, mentre l'altro posi in quiete, è bene determinare, quale, e quanta sia per essere la velocità, colla quale sieno per muoversi poi amendue, dopo la caduta dell'uno, scendendo questo, e salendo quello. Già per le cose dimostrate noi sappiamo, che quel grave, che partendosi dalla quiete liberamente scende, acquista tuttavia maggiore e maggior grado di velocità perpetuamente, sicchè nel caso nostro il grado massimo di

velocità del grave mentre liberamente scende, è quel che si trova avere nel punto, che egli comincia a sollevare il suo compagno, ed è manifesto, che tal grado di velocità non si andrà più augumentando, essendo tolta la cagione dello augumento, che era la gravità propria di esso grave descendente, la quale non opera più, essendo tolta la sua propensione di scendere dalla repugnanza del salire di altrettanto peso del suo compagno. Si conserverà dunque il detto grado massimo di velocità, ed il moto di accelerato si convertirà in equabile; quale poi sia per essere la futura velocità, è manifesto dalle cose dimostrate e vedute ne' passati giorni, cioè che la velocità futura sarà tale, che in altrettanto tempo, quanto fu quello della scesa, si passerà doppio spazio di quello della caduta.

Sagr. Meglio dunque di me aveva filosofato il Sig. Aproino, e sin qui resto molto bene appagato del discorso di V. S. ed ammetto per verissimo quanto mi ha detto: ma per ancora non mi sento aver fatto acquisto tale, che mi basti per levare l'eccessiva maraviglia, che sento nel vedere essere superate resistenze grandissime dalla virtù della percossa del percuziente, ancorchè nè molta sia la sua gravità, nè eccessiva la sua velocità, e quello, che ne accresce lo stupore è il sentire, che ella afferma nessuna essere la resistenza (salvo

che se fusse infinita) che al colpo possa resistere senza cedere; e più, che di tal percossa non si possa in veruna maniera assegnare una determinata misura; però il desiderio nostro sarebbe, che V. S. mettesse mano a dilucidare queste tenebre.

Salv. Essendo che non si può applicare dimostrazione alcuna sopra una proposizione, della quale il dato non sia uno, e certo, però volendo noi filosofare intorno la forza di un percuziente, e la resistenza di quello, che la percossa riceve, bisogna che prendiamo un percuziente, la cui forza sia sempre l'istessa; quale è quella del medesimo grave cadente sempre dalla medesima altezza; e parimente stabilischiamo un ricevitore del colpo, la cui resistenza sia sempre la medesima. E per averlo tale voglio, che (stando su l'esempio di sopra dei due gravi pendenti dai capi dell'istessa corda) che percuziente sia il piccol grave, che si lascia cadere, e che l'altro quanto si voglia maggiore sia quello, nell'alzamento del quale venga esercitato l'impeto del piccolo cadente; dove è manifesto, la resistenza del grande esser sempre, ed in tutti i luoghi la medesima cosa, il che non accade nella resistenza del chiodo, o del palo, ne' quali ella va sempre crescendo nel penetrare, e con proporzione ignotissima per gli accidenti varj, che s'interpongono di variate durezze nel legno, e nel terreno, ec. an-

corchè il chiodo, ed il palo sieno sempre i medesimi. In oltre è necessario, che ci riduchiamo a memoria alcune conclusioni vere, delle quali si parlò a' giorni passati nel trattato del moto; e sia la prima di esse, che i gravi descendenti da un punto sublime sino a un soggetto piano orizzontale, acquistano eguali gradi di velocità, sia la scesa loro fatta o nella perpendicolare, o sopra qualsivogliano piani diversamente inclinati, come per esempio, essendo A B (Fig. XLII.) un piano orizzontale, sopra il quale dal punto C caschi la perpendicolare C B, e dal medesimo C altre diversamente inclinate C A, C D, C E, dobbiamo intendere i gradi di velocità dei cadenti dal punto sublime C, per qualsivoglia delle linee che dal punto C vanno a terminare nell' orizzontale, essere tutti eguali. In oltre si dee nel secondo luogo supporre l' impeto acquistato in A dal cadente dal punto C, esser tanto quanto appunto si ricercherebbe per cacciare in alto il medesimo cadente, o altro a lui eguale sino alla medesima altezza; onde possiamo intendere, che tanta forza bisogna per sollevar dall' orizzonte sino all' altezza C l' istesso grave, venga egli cacciato da qualsivoglia de' punti A, D, E, B. Riduchiamoci nel terzo luogo a memoria, che i tempi delle scese per i notati piani inclinati hanno tra di loro la medesima proporzione, che le lunghezze di essi pia-

ni; sicchè quando per esempio il piano A C fosse lungo il doppio del C E, e quadruplo del C B, il tempo della scesa per C A sarebbe doppio del tempo della scesa per C E, e quadruplo della caduta per C B. In oltre ricordiamoci, che per far montare o vogliam dire, per strascicare l'istesso peso sopra i diversi piani inclinati, sempre minor forza basta per muoverlo sopra il più inclinato, che sopra il meno, secondo che la lunghezza di questo è minore della lunghezza di quello. Ora stante questi veri supposti finghiamoci il piano A C (Fig. XLIII.) esser v. gr. dieci volte più lungo del perpendicolo C B, e sopra esso A C esser posato un solido S, pesante cento libre: è manifesto, che se a tal solido fusse attaccata una corda, la quale cavalcasse sopra una girella posta più alta del punto C, la qual corda nell' altro suo capo avesse attaccato un peso di 10 libbre, qual sarebbe il peso P, è manifesto, che tal peso P, con ogni poco di giunta di forza, scendendo tirerebbe il grave S sopra il piano A C. E qui si dee notare, che sebbene lo spazio, per lo quale il maggior peso si muove sopra il suo piano soggetto, è eguale allo spazio per lo quale si muove il piccolo descendente (onde alcuno potrebbe dubitare sopra la generale verità di tutte le meccaniche proposizioni, cioè che piccola forza non supera, e muove gran resistenza, se non quando il moto

di quella eccede il moto di questa, colla proporzione contrariamente rispondente ai pari loro) nel presente caso la scesa del piccolo peso, che è a perpendicolo, si dee paragonare colla salita a perpendicolo del gran solido S, vedendo quanto egli dalla orizzontale perpendicolarmente si solleva; cioè si dee riguardare quanto ei monta nella perpendicolare B C. (1)

Avendo io Sig. fatto diverse meditazioni circa il distendere quello, che mi resta a dire, e che è la somma del presente negozio, fermo la seguente conclusione, per esser di poi esplicata, e dimostrata.

Propos. Se l'effetto, che fa una percossa del medesimo peso, e cadente dalla medesima altezza caccierà un resistente di resistenza sempre eguale per qualche spazio, e che per fare un simile effetto ci bisogni una determinata quantità di peso morto, che senza percossa prema, dico che quando il medesimo percuziente sopra un altro resistente maggiore con tal percossa lo caccerà v. g. per la metà dello

---

(1) *Avverta il Lettore, che il discorso seguente non bene sarà connesso colle cose supposte di sopra, perchè l'Autore ha avuto pensiero di distenderlo diversamente da quello, che aveva in animo, quando si notarono le sopraddette conclusioni.*

spazio, che fu cacciato l'altro, per far questa seconda cacciata non basta la pressura del detto peso morto, ma ve ne vuole altro il doppio più grave, e così in tutte le altre proporzioni, quanto una cacciata fatta dal medesimo percuziente è più breve, tanto per l'opposito con proporzione contraria vi si ricerca per far l'istesso gravità maggiore di peso morto premente. Intendasi la resistenza, stando nel medesimo esempio del palo, esser tale, che non possa esser superata da meno di cento libbre di peso morto premente, e che il peso del percuziente sia solamente dieci libbre, e che cadendo dall' altezza v. gr. di quattro braccia, cacci il palo quattro dita. Qui primieramente è manifesto, che il peso delle dieci libbre, dovendo calare a perpendicolo, sarà bastante di far montare un peso di libbre cento sopra un piano inclinato tanto; che la sua lunghezza sia decupla della sua elevazione, per le cose dichiarate di sopra, e che tanta forza ci vuole in alzare a perpendicolo dieci libbre di peso, che nell' alzarne cento, sopra un piano di lunghezza decupla alla sua perpendicolare elevazione; e però se l'impeto, che acquista il cadente per qualche spazio a perpendicolo, si applichi a sollevare un altro a se eguale in resistenza, e lo solleverà per altrettanto spazio; ma eguale è alla resistenza del cadente di dieci libbre a perpendicolo quella dell' ascen-

dente di cento libbre sopra il piano di lunghezza decuplo alla sua perpendicolare elevazione; adunque caschi il peso di dieci libbre per qualsisia spazio perpendicolare, l'impeto suo acquistato, ed applicato al peso di cento libbre, lo caccerà per altrettanto spazio sopra il piano inclinato, al quale spazio risponde l'altezza perpendicolare grande, quanto è la decima parte di esso spazio inclinato. E già si è concluso di sopra, che la forza potente a cacciare un peso sopra un piano inclinato è bastante a cacciarlo anche nella perpendicolare, che risponde all' elevazione di esso piano inclinato, la qual perpendicolare nel presente caso è la decima parte dello spazio passato sull'inclinata, il quale è eguale allo spazio della caduta del primo peso di dieci libbre; adunque è manifesto, che la caduta del peso di dieci libbre fatta nella perpendicolare è bastante a sollevare il peso di cento libbre pur nella perpendicolare, ma solo per lo spazio della decima parte della scesa del cadente di dieci libbre; ma quella forza, che può alzare un peso di cento libbre è eguale alla forza, colla quale il medesimo peso delle cento libbre calca in giù, e questa era la potente a cacciare il palo postavi sopra, e premendo. Ecco dunque esplicato, come la caduta di dieci libbre di peso è potente a cacciare una resistenza equivalente a quella, che ha il peso di cento libbre per es-

ser sollevato, ma la cacciata non sarà più, che per la decima parte della scesa del percuziente. E se noi porremo la resistenza del palo esser raddoppiata, o triplicata, sicchè vi bisogni per superarla la pressura di dugento, o trecento libbre di peso morto, replicando simil discorso, troveremo, l' impeto delle dieci libbre cadenti a perpendicolo esser potente a cacciare, siccome la prima, la seconda, e la terza volta il palo, e come nella prima la decima parte della sua scesa, così nella seconda volta la ventesima, e nella terza la trentesima parte della sua scesa. E così moltiplicando la resistenza in infinito sempre la medesima percossa la potrà superare, ma col cacciare il resistente sempre per minore e minore spazio con alterna proporzione, onde pare, che noi ragionevolmente possiamo asserire, la forza della percossa essere infinita. Ma ben conviene, che altresì consideriamo anche per un altro verso la forza del premente senza percossa, essere essa ancora infinita; imperocchè quando ella supera la resistenza del palo, lo caccerà non per quello spazio solo, che lo avrà cacciato la percossa, ma seguiterà di cacciarlo in infinito.

Sagr. Io veramente scorgo il progresso di V. Sig. camminare molto dirittamente all' investigazione delle vera causa del presente problema; ma perchè mi pare, che la percossa possa essere creata in tante e

tante maniere, ed applicata a tante varietà di resistenze, credo esser necessario andarne esplicando almeno alcune, l'intelligenza delle quali potrebbe aprirci la mente all'intelligenza di tutte.

Salv. V. S. dice benissimo, ed io di già mi era apparecchiato ad apportarne qualche caso. Per uno de' quali diremo, che alle volte può accadere, che l'operazione del percuziente si faccia palese, non sopra il percosso, ma nello stesso percuziente, e così dando sopra una ferma incudine un colpo con un martello di piombo, l'effetto caderà nel martello, il quale si ammaccherà, e non nell'incudine, che non si abbasserà. E non dissimile a questo effetto è quello del mazzuolo degli scarpellini, il quale essendo di ferro non temperato, e però tenero, nel lungo percuotere sopra lo scarpello di acciajo di dura tempera, non ammacca esso scarpello, ma bene incava, e dilacera se medesimo. Altra volta in altro modo si rifletterà l'effetto pure nel percuziente, siccome non di rado si vede, che volendosi continuare di cacciare un chiodo in un legno durissimo, il martello ribalza indietro senza punto cacciare un chiodo, ed in questo caso si dice, il colpo non è attaccato. Non dissimile è il balzo, che sopra un duro, e fermo pavimento fa il pallone gonfio, ed ogni altro corpo di materia talmente disposta, che ben cede alla percossa, ma ritorna

come facendo arco nella sua prima figura, ed un tal ribalzamento accade quando non solamente quello, che percuote cede, e poi ritorna, ma quando ciò accade in quello, sopra di che si percuote, ed in tal maniera risalta una palla, ancorchè di materia durissima, e nulla cedente, cadendo sopra la carta pecora ben tesa del tamburo. Scorgesi anco, e con maggiore maraviglia l'effetto, che nasce, quando allo spignere senza percossa si aggiugne una percossa, facendo un composto di amendue; e così vediamo negli strettoi da panni, o da olio, e simili, quando col semplice spignere di quattro, o sei uomini si è fatta calare la vite, quanto potevano, col ritirare un passo indietro la stanga, e velocemente urtando con essa, moveranno ancora più e più la vite, e si ridurranno a tal segno, che l'urto, colla forza di quei quattro, o sei, farà quello, che non farebbero dodici, o venti col solo spignere, nel qual caso si ricerca la stanga esser molto grossa, e di legno assai duro, sicchè poco, o nulla si pieghi, perchè cedendo questa, l'urto si spegnerebbe nel torcerla.

(1) In ogni mobile, che debba esser mosso violentemente, pare che sieno due

---

(1) Tra gli scritti originali del Galileo sopra la percossa, in un foglio sepa-

spezie distinte di resistenza: l'una che riguarda quella resistenza interna, per la qual noi diciamo più difficilmente alzarsi un grave di mille libbre, che uno di cento; l'altra che ha rispetto allo spazio, per lo quale si ha da fare il moto; e così maggior forza ricerca una pietra ad esser gettata lontano cento passi, che cinquanta, ec. A queste due diverse resistenze rispondono proporzionatamente li due diversi motori, l'uno de' quali muove premendo senza percuotere, l'altro opera percuotendo. Il motore, che opera senza percossa, non muove se non una resistenza minore, benchè insensibilmente, della sua virtù, o gravità premente, ma la moverà bene per ispazio infinito accompagnandola sempre colla sua stessa forza; e quello, che muove percuotendo, muove qualsivoglia resistenza, benchè immensa, ma per limitato intervallo. Onde io stimo vere queste due proposizioni, il percuziente muovere infinita resistenza per finito e limitato intervallo, il premente muover finita e limitata resistenza per infinito intervallo: sicchè al percuziente sia proporzionabile l'intervallo, e non la resistenza, ma al pre-

---

rato vi è di mano dell' istesso Galileo, quanto qui ora si riferisce, che doveva essere inserito in questa sesta Giornata.

mente la resistenza, e non l'intervallo. Le quali cose mi fanno dubitare, che il quesito del Sig. Sagredo sia inesplicabile, come quello, che cerchi di agguagliar cose non proporzionabili, che tali credo io che sieno l'azioni della percossa, e quelle della pressione, siccome nel caso particolare qualunque immensa resistenza, che sia nel cuneo B A, (Fig. XLIV.) sarà mossa da qualunque percuziente C, ma per limitato intervallo, come tra i punti B A, ma dal premente D, non qualunque resistenza sia nel cuneo B A, sarà spinta, ma una limitata, e non maggiore del peso D; ma questa non sarà spinta per lo limitato intervallo tra i punti B A, ma in infinito, essendo sempre eguale la resistenza nel medesimo mobile A B, come si dee supporre, non facendo menzione in contrario nella proposta.

Il momento di un grave nell'atto della percossa altro non è, che un composto, ed aggregato di infiniti momenti ciascuno di essi eguale al solo momento, o interno, e naturale di se medesimo (che è quello della propria gravità assoluta, che eternamente egli esercita posando sopra qualunque resistente) o estrinseco, o violento, quale è quello della forza movente. Tali momenti nel tempo della mossa del grave si vanno accumulando in instante con eguale additamento, e conservando in esso, nel

modo appunto, che si va accrescendo la velocità di un grave cadente. Che siccome negl'infiniti instanti di un tempo, benchè minimo, si va sempre passando da un grave per nuovi, ed eguali gradi di velocità, con ritener sempre gli acquistati nel tempo precorso, così anche nel mobile si vanno conservando di instante in instante, e componendosi quei movimenti o naturali, o violenti, conferitigli o dalla natura, o dall'arte, ec.

La forza della percossa è di infinito momento, tuttavolta che ella si applichi in un momento ed in uno instante dal grave percuziente sopra materia non cedente; come si dimostrerà.

Il cedere di una materia percossa da un grave mosso con qualsivoglia velocità, non si può fare in uno instante, perchè altrimenti si darebbe il moto instantaneo per un spazio quanto, il che si prova impossibile. Se dunque si fa in tempo la cedenza nel luogo della percossa, in tempo ancora si farà l'applicazione di que'momenti acquistati nel moto dal percuziente, il qual tempo è bastante ad estinguere, ed a smorzare in parte quell'aggregato de'sopraddetti momenti, i quali se in uno instante di tempo si esercitassero contro il resistente (il che seguirebbe, quando le materie sì del percosso, come del percuziente non cedessero nè meno un punto)

assolutamente farebbero effetto ed operarazione assai maggiore in muoverlo, e superarlo, che applicato in tempo benchè brevissimo; dico effetto maggiore, perchè pure qualche effetto faranno eglino contro il percosso, quantunque minima si sia la percossa, e grandissima la cedenza; ma sarà forse impercettibile tale effetto a' nostri sensi, contuttochè realmente vi sia, il che a suo luogo dimostreremo; ma pure ciò manifestamente si scorge dall' esperienza; poichè se con un ben piccolo martello si anderà con percosse uniformi incontrando la testa di una grandissima trave, che sia a giacere in terra, dopo molte e molte percosse si vedrà finalmente essersi mossa la trave per qualche spazio percettibile, segno evidentissimo, che ogni percossa operò separatamente per la sua parte nello spingere la trave; poichè se la prima percossa non fusse a parte di tal effetto, tutte le altre susseguenti, come in luogo di prime, niente opererebbero, la qual cosa è contraria all' esperienza, al senso, ed alla dimostrazione, che si apporterà, ec.

La forza della percossa è di infinito momento, perchè non vi è resistenza benchè grandissima, che non venga superata da forza di percossa minimissima.

Colui che serra le porte di bronzo di S. Giovanni, invano tenterebbe di serrarle

con una sola e semplice spinta, ma con impulso continuato va imprimendo in quel corpo mobile gravissimo forza tale, che quando arriva a percuotere, ed urtare nella soglia, fa tremare tutta la Chiesa. Da questo si veda come si imprima ne' mobili, e più ne' più gravi, ed in essi si moltiplichi, e conservi la forza, che con qualche tempo gli si va comunicando, ec.

Simile effetto si vede in una grossa campana, che non con una sola tirata di corda, nè quattro, nè sei si mette in moto gagliardo ed impetuoso, ma con molte e molte, le quali a lungo reiterate, le ultime vanno aggiugnendo forza sopra quella acquistata dalle prime, e precedenti strappate, e quanto più grossa e grave sarà la campana, tanto maggiore forza ed impeto acquisterà, essendogli comunicato in più lungo tempo, e da maggior numero di strappate, che non si ricerca ad una piccola campana; che ben presto si mette in impeto, ma presto ancora le si toglie, non essendosi ella imbevuta (per così dire) di tanta forza quanto la più grossa.

Il simile accade ne' navigli ancora, i quali non alle prime vogate de' remi, o ai primi impulsi del vento si mettono in furioso corso, ma dalle continue vogate, e dalla continua impressione di forza, che fa il vento nelle vele, acquistano impeto grandissimo atto a fracassare gl' istessi vascelli,

F. 7.
A
I
C
B
F
F
G
D
B
F. 8.
A
B
D
C
A
B
C
F. 15.
D
A
C
B
B
A
M
C
X I
D
E
B
N
O
Y
S
T
F
C
N
O
Y
S
G
N
O
Y
H
N
O
K
N

L O N P X I A S T
A A A A A
A A A A a
F. A A A B
A A B F
A B B
B B C
B B G
B C
B C
C D
C H
C
D
D
E
K
F. 37.
E G
A B
C D
F H
F. 44.
C
D
A
B
C
D

mentre da quelle portato d'essero d'urto in uno scoglio.

L' arco dolce, ma grande d' una balestra, farà talvolta maggior passata d' un altro assai più duro, ma di minor tratta, poichè quello accompagnando per più tempo la palla, gli va continuamente imprimendo la forza, e questo tosto l' abbandona.

TRATTATO
DELLE RESISTENZE

PRINCIPIATO DA

VINCENZIO VIVIANI

PER ILLUSTRARE L'OPERE

DEL GALILEO,

Ed ora compiuto, e riordinato colla giunta di quelle dimostrazioni che vi mancavano

DAL P. D. GUIDO GRANDI

Abate Camaldolese, Matematico di S. A. R. e dello Studio Pisano.

Definizioni Prime.

I. *Momento assoluto d'un grave, e d'altra qualsivoglia forza, animata, o no, s'intenda quel premere libero, e non*

impedito, che fa il grave, o la forza all' ingiù per la perpendicolare all' orizzonte.

II. *Resistenza assoluta della sezione d' un corpo, s' intenda quella repugnanza, che le parti del solido, mediante la coerenza di dette parti in quella sezione, hanno ad essere separate dal momento assoluto d' un grave, o d' una forza.*

III. *Misura assoluta della resistenza assoluta d' una sezione s' intenda quel momento assoluto d' un grave, o d' una forza, che equivaglia alla detta resistenza assoluta: cioè che con ogni poco di giunta di peso, o di forza ne segua lo strappamento delle dette parti in detta sezione.*

IV. *Resistenza omogenea uniforme......*

V. *Centro delle resistenze....*

N O T E.

Prima di supplire queste due definizioni rimase imperfette, piacemi d' illustrare, colla scorta di ciò, che altrove accenna il nostro Autore, le definizioni precedenti, e d' inserirvene prima alcune altre, le quali pare che manchino, e verisimilmente vi sarebbero state aggiunte dallo stesso Autore, se avesse potuto dare compimento a quest' Opera.

Il premere libero, e non impedito d'un grave, o d'altra forza animata s'intende, quando preme senza verun vantaggio, o svantaggio, che possa apportargli l'ajuto d'una leva, o di una contralleva, per cui operi la forza, o la resistenza contrapposta: e questo dicesi momento assoluto, il quale in se stesso è sempre invariabile, dipendendo dal peso di quel grave, o pure da quella quantità di peso, che quella forza animata regger potrebbe, senz'altra macchina applicandosi a sostenerlo. Onde coerentemente altresì la resistenza assoluta della sezione d'un corpo è la quantità di quella forza, che tiene attaccate nella detta comune sezione le parti del corpo, sicchè resistano allo strappamento, che ne farebbe, direttamente tirando, cioè con direzione perpendicolare al piano di detta sezione, un peso attaccatovi, o pure una forza animata, che vi si applicasse col suo assoluto momento, cioè senza l'ajuto d'alcuna leva, che ne faciliti l'effetto dello spezzarsi.

E perchè quella tal qual forza, che connette le parti del solido, non è a noi in se stessa nota: e si disputa ancora trai filosofi naturali, donde ella dipenda; se dalla tessitura ed intralciamento delle fibre, o dallo squisito contatto d'ogni particella, o dalla pressione dell'ambiente, o da altro glutine interpostovi; perciò volendo pure esaminarne il valore, e paragonare le di-

verse resistenze, che a varie figure, o quantità di sezioni possono convenire, non si può far altro, che misurare il valore di qualunque resistenza col minimo peso, che possa direttamente premendo superarla, o col grandissimo e sommo peso, che dal solido regger si possa prima di cedere, e di spezzarsi: essendo pure il dovere, che se una forza, appoco appoco crescendo, giugne finalmente a vincere un'altra forza, prima d'arrivare a questo segno, si equilibri con essa, e precisamente uguagli coll'assoluto momento suo il valore di quella, non potendo di minore diventare successivamente maggiore, se prima in qualche differenza di tempo non si fa uguale alla forza competitrice. E però, se avendo attaccato fortemente in alto alla volta d'una camera un cilindro di vetro, di pietra, o di metallo s'intenderà questo talmente prolungarsi, che venga col proprio peso a rompersi: o pure se vi si attaccherà successivamente maggiore e maggior peso, finattanto che tra il proprio peso del cilindro, e quello che si aggiunge da'piedi, ne succeda finalmente l'effetto dello strappamento: quel minimo peso, che è abile a spezzare il corpo, o veramente quel sommo, che da esso si può sostenere senza spezzarsi, e che precisamente pareggia l'assoluta resistenza di quella sezione del cilindro, che dovrà scoprirsi nella rottura, con ragione si assumono per determinate

misura di quella resistenza. E torna lo stesso prender l' uno, o l'altro dei detti pesi, cioè il maggiore che possa reggersi, ed il minimo abile a rompere il corpo: non differendo questi da quegli, che d' una quantità minore di qualsisia proposta, e per così dire infinitamente piccola, per cui appresso a' Matematici non si altera l' uguaglianza.

Ma sentiamo il nostro Autore, che in questo proposito altrove si dichiara così.

La resistenza d' un solido assolutamente presa, s' intenda esser sempre misurata da quel peso, che posto nell' estremità del solido fitto per di sopra in una volta, o comunque fermato da un capo nel muro, purchè il peso tiri direttamente a perpendicolo del piano della rottura, è bastante appunto a spezzarlo.

Sicchè nel prolungare perpendicolarmente il cilindro A B (Fig. I.), *finchè segua il moto, cioè si faccia lo strappamento di esso dalla parte superiore, si viene con ciò a misurare la sua resistenza, imperocchè questo è l' istesso appunto, che dire, che la resistenza in* B *equivale al momento assoluto* B A.

Si sperimenti adunque quanto peso ci voglia a strappare i cilindri di vetro per diritto a piombo, che abbiano questa, o simil figura. A B (Fig. II.) *sia un piano stabile in forma di due piastre, ne' tagli delle quali siano gli scavi in semicircolo*

d' un foro, dove accostate insieme, passi la verga di vetro C D, *rimanendovi impegnata col suo termine superiore* C *più grosso del fusto, attaccando poscia al termine inferiore* D *tanto peso* E, *che faccia lo strappamento.*

Di qui si cava la tariffa delle resistenze assolute d' uguali sezioni di metalli, e si può provare, se doppia sezione voglia doppio peso, come la ragione ce ne persuade.

Però supposta nota la resistenza d' un solido d' una data materia, che vien misurata dalla forza, che la supera, tirandola perpendicolarmente, si potrà con regola misurare le resistenze rispettive (secondo la diffinizione da apportarsi qui appresso) de' medesimi solidi tenuti orizzontalmente, o in altra inclinazione.

Ora seguendo l' ordine delle prime definizioni, per supplire ciò che manca nel MS. del nostro Autore, diremo.

Defin. IV. Momento rispettivo d' un grave, o d' altra forza animata s' intenda quell' energia, che ha in riguardo alla maniera, con cui si applica per via di leva, o d' altra macchina, a muovere qualsivoglia resistenza; il quale momento conseguentemente varia, secondo la distanza dal centro del moto, e secondo la lunghezza della contralleva, con cui opera il resistente, dalla quale riceve maggiore, o minore vantaggio.

V. Resistenza respettiva della sezione d' un corpo è quella forza, con cui contrasta ad essere spezzato esso corpo nella detta sezione, posata sopra qualche sostegno, quando il peso, o altra forza animata, che s' applica a farne lo strappamento, tira obliquamente al piano della medesima sezione, coll' ajuto di maggiore, o minor leva, secondo cui conseguentemente si varia in diverse circostanze il valore di tal resistenza: venendo sempre misurata dal più gran peso, che possa reggere, o dal minimo di quelli, che in tal disposizione sieno abili a superarla; e viene a significare lo stesso, che il momento della resistenza assoluta, che gli conviene in diverse circostanze.

VI. Resistenza omogenea uniforme della sezione d' un solido, è quando ciascuna fibra d' essa ha uguale resistenza assoluta, sicchè dallo stesso momento assoluto d' un grave, o d' altra forza perpendicolarmente applicatavi può ciascheduna essere superata.

VII. Resistenza varia e difforme della sezione di un solido sarà, quando le fibre di esso, non essendo ugualmente forti, non averanno ugual resistenza assoluta, ma da diversi momenti assoluti potrà qualunque di esse venire costretta allo strappamento, come accade in un legno nodoso, in un marmo di varie vene vergato, ec.

VIII. Centro delle resistenze è quel punto, in cui raccolta si concepisce tutta la forza delle resistenze sparse per ogni fibra; nella maniera che il centro di gravità si dice quel punto, in cui raccolta si concepisce l' azione della gravità d' un corpo; anzi si crede l' uno, e l' altro centro essere lo stesso punto.

Così il Galileo, Padre di questa scienza, da per tutto suppone; ed è senza contesa alcuna in ciò seguitato dal Blondello, dal Leibnizio, dal Varignonio, e dal Bernoullio, e da quant' altri hanno poscia trattato di resistenze: i quali tutti concepiscono la resistenza rispettiva di qualsivoglia sezione d' un corpo, applicata nel centro di gravità, e come riunitasi in esso: mentre gli danno per leva, con cui l' azione sua si rende più vantaggiosa, la distanza di detto centro di gravità dall' appoggio, sopra di cui far si debbe lo strappamento; della quale supposizione però niuno mettendosi in pena d' assegnarne qualche verisimil ragione, tanto più è da stimarsi l' acutezza del nostro Autore, che si provò, come sopra, a dare una particolare definizione del centro delle resistenze: sebbene non l' abbiamo ne' suoi scritti ritrovata compiuta: e di più ne accenna altrove il fondamento col seguente discorso.

È verissimo, che il centro di gravità della sezione del solido fitto nel muro è il centro della resistenza dell' attaccamento

dell' una superficie coll' altra sua contigua: poichè gl' infiniti attaccamenti, e resistenze si debbono supporre e considerare tutte uguali, mentre il solido sia di materia omogenea. Se dunque le resistenze di que' filamenti del solido sono tutte uguali. e di uguale spessezza, saranno come tanti pesi eguali distribuiti in distanze eguali in una leva, che è la sezione, e che gravitano nel loro centro di gravità comune, che è il centro di gravità di detta leva.

Il che volendo più pienamente dichiarare, secondo la mente del nostro Autore, la quale abbastanza riluce dallo sbozzo d' una figura ivi disegnata, e dalle parole addotte di sopra: diremo, che la forza, per cui attaccate si tengono le fibre d' un corpo, fa il medesimo effetto, che farebbe un peso, il quale calcasse, e comprimesse ciascuna parte contro dell' altra, onde siccome se innumerabili colonnette gravi S T, S T (Fig. III.) egualmente alte premessero contro la superficie orizzontale E A C, l'azione loro s' intenderebbe riunita nel centro comune di gravità di esse, che corrisponderebbe appunto al centro D della figura E A C, quando le dette colonnette colle basi loro tutta la riempissero: di maniera che essendo la figura A E C sostenuta sopra la linea E C, sarebbe lo sforzo delle colonnette prementi eguale al momento di un peso, il quale pareggiando il peso di tutte, fosse applicato nel punto

D della leva D B, mobile d'intorno al sostegno B; Così ancora, rivoltandosi la figura E A C (Fig. IV.), e diventando verticale, o stendendosi in qualsivoglia altro piano, come quando è la comune sezione d'un muro, e di un solido impegnatovi dentro, le fibre S T, S T, che tengono attaccato il solido A H I C alla superficie E A C, essendo tante forze prementi per la direzione S T, si debbono intendere come riunite nel centro di gravità D della figura E A C, ed operanti col vantaggio della leva D B, mobile d'intorno al sostegno B; non essendovi altro divario da questa disposizione all'altra di prima, che dell'essere le direzioni S T parallele, o inclinate all'orizzonte, dove prima elle erano perpendicolari; il che non può variare nulla nel modo di operare, sicchè ciò, che prima facevano per un verso, ora non lo facciano per l'altro corrispondente alla loro costituzione, diretta non più al centro della terra, ma ad un altro punto lateralmente posto in una infinita distanza, nella medesima dirittura perpendicolare alla stessa sezione.

Supposizioni.

I. Qualunque peso sempre discende, qualunque volta il suo centro di gravità

movendosi, può accostarsi al centro comune de' gravi, se da maggiore forza, e resistenza non venga impedito.

II. Qualunque peso liberamente si sospenda pel suo centro di gravità, non potersi giammai fermare, finattanto ch'esso centro non abbia acquistato l'infimo punto della circonferenza, per cui si muove.

III Qualunque solido posato sopra un sostegno, allora fermarsi, quando la linea retta, che congiugne il centro di gravità del solido, ed il contatto di esso col sostegno, sarà perpendicolare all' orizzonte. Cioè allora il cilindro A B (Fig. v.), *o cono, o altro solido starà fermo sopra il sostegno* C, *quando tirata dal centro di gravità loro* D *la linea* D C, *sarà perpendicolare all' orizzonte: perchè qualunque grave ha momento per la perpendicolare tirata dal suo centro di gravità, che è la brevissima verso il centro comune de' gravi; e dovendosi muovere, non è maggior ragione, che si muova dall' una parte più, che dall' altra.*

IV. Qualunque resistenza potersi superare da un peso, o da un momento, che sia maggiore di essa resistenza.

V. In questa scienza delle resistenze, doversi astrarre dalla flessibilità de' corpi, che fanno molla, potendo questi alterare le proporzioni investigate: siccome si dee prescindere ancora dalle tempere, e varie crudezze de' metalli.

Imperocchè la cedenza delle materie de' solidi altera le proporzioni delle resistenze a segno tale, che un medesimo ferro sarà ora più, ora meno resistente, secondo la differenza delle tempere, e secondo la sua flessibilità, che in virtù di dette tempere si fa or maggiore, or minore; e però, data la resistenza assoluta d'un solido in una tal sezione, volendo ricercare la resistenza rispettiva, che è quella, quando se gli fa forza pel traverso, converrà immaginarsi la materia nulla cedente, perchè più e più che cederà, maggiore e maggior peso vi vorrà a fare la rottura.

Quindi è, che una spada ben temperata si piega bensì facilmente, ma non così agevole cosa è il romperla, come si farebbe d'una pari lastra di ferro, che fusse crudo e rozzo. Così per la stessa ragione più facilmente si spezza una verga di legno secco, che quando era verde, e flessibile; ed è stato osservato da Monsù Parent, che l'Abete, il quale è più cedente della Quercia, sostiene maggior peso prima di rompersi: di maniera che ordinariamente la resistenza di quello alla resistenza di questa si stima essere, come 358 a 300, o come 119 a 100, secondo le sperienze rapportate nelle memorie dell'Accademia Reale di Parigi del 1707. Dove ancora si riferisce dal medesimo Autore, che nel cedere e piegarsi le fibre d'un solido, la

curvatura di esso raccorcía la leva d'intorno a una sua parte quadragesima quinta, allorchè il solido è ritenuto in un termine solo: ma la scorcia d'un sessagesimo solamente, quando sia ritenuto in ambi gli estremi. Il che però ricercherebbe più esatta e diligente osservazione; essendo verisimile, che la varietà delle materie permetta, che le fibre superiori diversamente si stendano, e l'inferiori si comprimano, cagionandosi uno stiramento, ed una compressione, quando più, quando meno violenta, la quale un grandissimo dispendio di forze richiede, ed a cui una diversa piegatura del solido corrisponde, e per conseguenza si viene a scorciare con diversissima proporzione la leva; onde non solamente delle resistenze assolute, ma ancora delle rispettive, considerate per altro in pari circostanze, è vero ciò che altrove dice il nostro Autore, e può registrarsi per sesta supposizione, cioè che

VI La diversità della materia altera la resistenza, poichè due solidi eguali, e simili, ma di materia diversa, come di vetro l'uno, e l'altro d'acciajo ec. resistono disugualmente.

VII. La separazione delle due superficie del solido tenuto per traverso si fa nel medesimo instante, tanto nei punti remoti dal sostegno, che nei vicini, e che in quelli di mezzo: stante che tale separazione si fa con moto regolare dell'una

superficie che si muove, dall' altra che sta ferma.

Il che è coerente all' ipotesi del Galileo, che suppose altresì strapparsi in uno istante tutte le fibre del solido, quando si rompe trasversalmente: come di necessità debbe succedere, secondo la quinta supposizione, che le fibre non sieno cedenti, ma che senza allungarsi, o stendersi per di sopra, nè serrarsi, o comprimersi per di sotto, si strappino. È ben vero, che il Mariotte nel suo trattato del moto dell' acque part. 5. disc. 2. il Lebnizio negli Atti di Lipsia del mese di Luglio 1684. ed il Varignonio nelle memorie dell' Accademia Reale 1702 stimarono più verisimile ipotesi il supporre, che si stendano, e stirino alquanto le fibre, e più le lontane dal sostegno, che le vicine, a proporzione della distanza dal centro del moto, cioè dal sostegno, sopra di cui si fa la rottura; e poscia il Sig. Jacopo Bernoulli di questa medesima supposizione non contento, ne propose un' altra da lui, e da altri creduta più vera, in cui s' immagina, che prima di spezzarsi il solido, alcune fibre vicino all' appoggio si comprimano, altre più sopra si stendano: sicchè tra l' une, e l' altre vi abbia un punto di mezzo, che non soffre veruna compressione, o stendimento alcuno, e da cui verso l' una, e l' altra parte sempre più si aumentino l' estensioni delle fibre superiori, e le compressioni del-

l'inferiori, come apparisce da una lettera di questo celebre Matematico, scritta li 12 Marzo 1705, ed inserita nelle memorie dell'Accademia Reale di Parigi dello stesso anno. Ma queste diversità d'opinioni dimostrano appunto, quanto difficil cosa sia il determinare la vera e naturale ipotesi, la quale può essere, che in varj casi molto diversa si trovi: e però quanto meglio sia l'astraere da cotesti accidenti, per illustrare teoricamente la materia, che abbiamo per le mani, come ha fatto il Galileo, e con esso il nostro Autore: lasciando ai Filosofi, ed a' Pratici osservatori della natura, il mettere in conto quelle differenze, che può recar seco la diversa tessitura, e fortezza e flessibilità delle fibre in qualsivoglia materia; limitando con esse, o modificando le conclusioni dedotte generalmente da' fondamenti teorici di questa dottrina.

VIII. Nello strappare un solido per diritto, si hanno da considerare due resistenze: una è quella dell' attaccamento de' filamenti del solido, la quale è diversa, secondo le diversità delle materie d'esso solido, e ne' metalli secondo le tempere: l' altra è quella del vacuo, che in tutte le materie è sempre la stessa, a proporzione delle grossezze del solido; ma nello strappare il solido per traverso, pare che la resistenza del vacuo cessi affatto, poichè mostra l' esperienza, che volendo separare con moto parallelo una la-

mina di vetro liscio da un' altra lamina simile, vi vuole buona forza, che è quella del vacuo; ma volendole separare con moto angolare, non vi si ricerca punto di forza.

Da molti luoghi di quest' opera già espressamente apparisce, che l' Autore nostro vi lavorava intorno per fino dall' anno 1644 ma quando la malignità di qualche invidioso volesse sospettare, essere stata per affettazione aggiunta assai dopo in varj luoghi del MS. la nota di tempo più antico: eccone in questa stessa supposizione un altro evidente riscontro, dove nomina *la forza del vacuo*, seguendo la maniera di favellare degli antichi, adoperata ancora dal Galileo suo maestro nel primo dialogo; il che dimostra, essere ciò stato scritto prima dell' anno 1644. in cui il Torricelli per mezzo della sua famosa sperienza, di cui appunto fu ministro e primo esecutore il nostro Viviani, rinvenisse la vera cagione di ciò, che s' attribuiva alla forza del voto, e palesasse esser questa la sola pressione dell' aria; non essendo verisimile, che dopo sì celebre e sì felice scuoprimento, a lui prima che ad altri notissimo, seguitasse il nostro Autore a chiamare col volgo *forza del voto*, cioè di un mero nulla, quello che potea, con maggiore proprietà di parlare, e con più ragionevole sentimento, chiamare forza della pressio-

ne dell' aere esterno, o d' altro fluido ambiente.

Diremo adunque, che siccome essendo congiunte insieme due pulitissime lastre di marmo, o di vetro, si sperimenta grandissima difficultà in separarle direttamente, non ostante che a tale effetto non sia d' uopo lo strappare veruna fibra, per cui si connetta questa lastra con quella: ma in vigore solamente della pressione, con cui l' aere esterno (o forse altro fluido più tenue) calca l' una contro dell' altra, resistono alla separazione, mancandovi l' aria di mezzo, che ajuti a spignere, secondo la direzione della forza, che tenta disgiugnerle; così dovendosi direttamente strappare un corpo, separandone un pezzo dall' altro contiguo, si sente la stessa ripugnanza, che si proverebbe, quando fussero già divisi, ma da uno squisito contatto, per opera della pressione del fluido ambiente, stessero insieme attaccati: ed oltre a ciò si prova tutta la difficultà, che risulta dalla tessitura, intralciamento, o forza interna, che hanno le fibre, per cui resistono alla divisione. Laddove quando trasversalmente si tenta lo spezzamento d'un solido, rimane solo la seconda difficultà da superare, ma non la prima, perchè da ogni lato essendo premuto il solido, cioè da destra a sinistra, e da sinistra a destra, ogni poco di forza che si applichi, per volerlo spignere più per un verso,

che per l'altro, viene ajutata dall'una, o dall' altra delle pressioni opposte, che si equilibrano; onde (se non ostasse l'intralciamento delle fibre, o l' interna forza, con cui esse alla divisione resistono) facilmente ne seguirebbe la separazione d' un pezzo dall' altro; e per ciò molto più agevole sarà ancora per questo capo il vincere la resistenza rispettiva, che l'assoluta, benchè non vi fusse il vantaggio della leva, come se il solido sporgesse fuori del muro per una distanza uguale al suo semidiametro, e che perciò il peso attaccato alla sua estremità fosse lontano dal sostegno altrettanto, quanto ne è lontana la resistenza, che si concepisce tutta ridotta nel centro della sua base, ad ogni modo maggior peso sarebbe necessario per romperlo, tirando con direzione perpendicolare alla base, che tirando obliquamente.

E potrebbe anch'essere, che questa, e non lo stiramento delle fibre fosse la cagione, per cui le sperienze fatte dal Signor Paolo Wrzio, come riferisce il Blondello, ed il Leibnizio, e le altre fatte dal Mariotte, mostrarono ricercarsi allo strappamento diretto de' solidi un molto maggior peso, di quello, che secondo la teoria del Galileo avrebbe dovuto bastare, in paragone di quel peso, che li rompeva, tirandoli obliquamente. Per esempio, riferisce il Mariotte: che per istrappare direttamen-

te un cilindretto di legno, il cui diametro era di 3 linee, vi vollero 330 libbre di peso: quando, secondo il calcolo del Galileo, se ne sarebbero ricercate solo 180. Chi sa, che quelle 150 di più, le quali vi s' impiegarono, non corrispondessero appunto alla pressione dell' aria, da cui il Galileo fece astrazione, per non averne alcuna notizia?

È ben vero, che se avesse il *Sig.* Viviani riveduta e perfezionata questa sua opera, non solamente in vece della forza del vacuo, surrogata averebbe la pressione dell' aria, ma non credo, che impegnato si sarebbe a dire, essere questa forza la stessa in tutte le materie, solamente variando a proporzione delle grossezze de' solidi; perchè secondo la tessitura, ed intralciamento delle parti componenti de' solidi, è manifesto, alcuni essere di più rara, altri di più serrata struttura, e da' pori di queste, o di quelle materie, dove più, dove meno perfettamente venir esclusa l' aria grossa, o sottile: dalle quali circostanze si varia in molte maniere il momento dell' aria esterna premente, facendosi ora maggiore, ed ora minore. Si può prescindere però ancora da questa forza, per dar luogo alla teoria generale, mettendola poi in conto, quando occorra, nella pratica.

IX. In oltre poi si possono considerare le sezioni de' solidi come gravi, e a guisa d' Archimede figurarsi, che i piani

abbiano peso, e che poi tali piani posati sul sostegno della leva ec.

M' immagino volesse dire, che tali piani, considerati come gravi, applicati al sostegno della leva, contrastino col peso, o colla forza, che tende a fare lo strappamento, e così l'immaginario peso di detti piani (considerato però come tendente ad un centro posto in infinita distanza da essi, per una direzione perpendicolare a' medesimi) equivalga alla forza della resistenza assoluta, o rispettiva, che per un verso direttamente, o almeno in parte opposto alla direzione della potenza, che cerca di effettuare lo strappamento, li va continuamente tirando. Donde tanto più chiaro apparisce, che il centro delle resistenze (come si è detto alla defin. 8.) sia il medesimo, che il centro di gravità della sezione, in cui si fa la rottura.

Anzi in seguito di questa supposizione il nostro Autore ha proposte quest' altre da lui chiamate.

Definizioni Seconde.

I. Piani, o sezioni d' uguale gravità in specie chiamo quelle, delle quali parti eguali pesano ugualmente.

II. Piani, o sezioni d' ugual gravità assoluta, quelle che pesano ugualmente,

o uguali, o disuguali che sieno tra di loro.

III. Piani, o sezioni di diversa gravità in specie quelle, delle quali parti uguali pesano disugualmente.

IV. Piani, o sezioni di diversa gravità assoluta quelle, le quali pesano disugualmente, o uguali, o disuguali che siano tra di loro.

Queste diverse maniere di gravità, credo che appresso il nostro Autore equivalgano a varie resistenze uniformi, o difformi già di sopra definite; in quanto che ce ne possono rappresentare varj gradi, riducendoli ad un' idea più distinta, che abbiamo della diversa gravità, che in varie materie corporee già ci è nota e manifesta; il che giova a fissarci meglio la fantasia, e fare sì, che più chiaro concepisca la diversa forza di resistenza, che per esempio ha il marmo dal ferro, o dal legno, coll' analogia del peso diverso, che in pari mole hanno varj corpi, come piombo, argento, acqua, pietra, ec.

E sebbene vi ha chi crede, che io averei fatto meglio a dissimulare queste seconde diffinizioni, per essere superflue, secondo il detto d'alcuni moderni, da' quali viene risolutamente asserito, non doversi definire l' uguaglianza, e disuguaglianza, essendo a suo giudizio cose chiare per se stesse, e manifeste, *e di lor natura, per così dire, indefinibili*, assicurando che *nè*

Euclide, nè alcun altro Matematico si è mai messo a definire l' egualità, quando l' ha voluta applicare ad altre cose; tuttavolta io non ho stimato bene di ometterle: sì per dar fuori intieramente tutto ciò, che il nostro Autore avea preparato sopra questa materia; e sì perchè sono di parere, che non si possano riprendere queste definizioni del Sig. Viviani, a similitudine di quelle, che nello stesso proposito per i corpi d' egual gravità assoluta, e d' egual gravità specifica, recò il Galileo nelle Galleggianti, ed il Borelli nel suo Archimede: per non dir nulla, che la pretesa induzione di Euclide, e degli altri Matematici è falsa, avendo noi da Euclide nel lib. 3. degli Elementi la definizione 1. de' cerchi eguali, e la quarta delle rette egualmente lontane dal centro del cerchio; e nel lib. 11. la decima de' solidi eguali, e simili; e nel frammento che di lui ci resta delle cose leggeri, e gravi, defin. 1. de' corpi uguali in grandezza, e la defin. 4. de' corpi eguali in potenza: e da Apollonio nel lib. 6. la defin. 1. delle sezioni coniche uguali, e la sesta de' segmenti loro uguali, e da Teodosio nel lib. 1. degli sferici la sesta de' cerchi ugualmente distanti dal centro della sfera; e da Gregorio di S. Vincenzio nel lib. 5. della quadratura del cerchio, la defin. 7. delle parabole uguali, e nel sesto l' ottava dell' iperbole uguali; e da Alessandro Mar-

chetti, nel libro della resistenza de' solidi; la definizione di quelli che sono di uguale, e di quelli che sono di maggiore, o minor resistenza; e da questi medesimi Scrittori, da' quali fu mosso questo scrupolo, e la definizione (buona, o rea ch' ella siasi) degli angoli solidi ugnali, e l' altra dell' ugnale moltiplicità; onde il celebre Matematico Isacco Barrovio nella terza lezione matematica di quelle, che recitò nel 1665. in Cantabrigia, e stampate furono nel 1684. in Londra, giudiciosamente disse: *Illorum nihil moror sententiam, qui aequalitatis, similitudinis, et ejusmodi relationum ingenitas nobis a natura species arbitrantur; quando commentum illud, ut jam antea vidimus, haud sit necessarium, et minus idoneum scientiis, nec ulla, quod ego percipiam, praeter metaphysicas quasdam vocabulorum perplexitates et argutias, solida ratione subnixum*: del che più a lungo nelle seguenti lezioni poscia discorre.

Ma è tempo oramai, premessi questi principj, di venire alle proposizioni.

Proposizione I. Teorema I.

I momenti di resistenza della medesima sezione, e di sezioni uguali, sono tra

di loro, come le distanze del centro di gravità d'esse dal sostegno.

Ciò è evidente, perchè essendo la stessa grandezza di sezione, e supponendosi le materie omogenee, sarà la stessa resistenza assoluta, e solo varierà la respettiva, cioè il momento di detta resistenza, a misura della leva favorevole, cui viene applicata, la qual leva non è altro, che la distanza del centro di gravità della figura (in cui riconcentrata si concepisce la resistenza per la definizione) dall' appoggio, sopra di cui si fa il moto nella rottura del solido.

Proposizione II. Teorema II.

I momenti delle resistenze nelle sezioni de' solidi, le di cui basi siano disuguali, ed eguali le altezze, sono come le medesime basi.

Ciò si verifica in tutte quelle figure di sezioni, nelle quali i centri di gravità dividono gli assi nella medesima ragione.

Imperocchè essendo uguali l' altezze, saranno altresì uguali le distanze de' centri di gravità da' sostegni; e però i momenti delle resistenze di tali sezioni varieranno solamente a misura, che variano le grandezze loro; onde saranno come le basi disuguali di esse.

Corollario I. In qualsivoglia sorta di

figure, essendo uguali le distanze del centro di gravità di esse dal sostegno, saranno i momenti delle loro resistenze proporzionali alle grandezze di esse figure.

Corollario II. Quindi è agevol cosa il raccogliere, che generalmente i momenti delle resistenze di due sezioni A, C, hanno la ragione composta di quella, che è tra le grandezze di esse, e di quella che passa fra le distanze de' loro centri di gravità da' sostegni; imperocchè presa di mezzo un' altra sezione B uguale di grandezza alla A, ma che abbia il centro di gravità ugualmente distante dal sostegno, come ha l' altra C; sarà il momento della resistenza A al momento della resistenza C in ragione composta di quella che ha il momento della resistenza A al momento della resistenza B, e di quella che è tra il momento della resistenza B, ed il momento della resistenza C; ma la prima ragione (per la prop. 1.) è eguale alla ragione delle distanze de' centri di gravità da' sostegni, che sono in A, ed in B (ovvero in C;) e la seconda ragione è quella, che passa tra le stesse grandezze delle sezioni B (ovvero A) e C (pel Coroll. preced.) dunque il momento della resistenza A a quello della resistenza C è in ragione composta delle ragioni di esse grandezze A, C, e delle distanze de' centri loro di gravità da' sostegni.

A C

B

Proposizione III. Teorema III.

I momenti delle resistenze nelle sezioni de' solidi, le quali abbiano ugual base, e disuguale altezza, sono tra di loro, come i quadrati dell' altezze (Purchè le dette sezioni sieno tali, che i centri di gravità di esse dividano gli assi della stessa ragione.)

Siano le figure A C B, G E H (Fig. VI.) *le comuni sezioni di alcuni solidi, orizzontalmente distesi, e dal muro, in cui perpendicolarmente sono fitti, e si suppongano o mezze ellissi, o rettangoli, o triangoli, o parabole: purchè abbiano le basi uguali* A B, G H, *ma l' altezze disuguali* C D, E F. *Dico, che il momento della resistenza* E·G H (*i quali momenti pel corollor.* 2. *della precedente, provengono dalle grandezze delle dette sezioni, e dalle distanze de' centri di gravità loro da' sostegni, ne' quali si sostengono i detti solidi, cioè dalle* O D, P F) *sta come il quadrato dell' altezza* C D *al quadrato dell' altezza* E F *di dette sezioni.*

Imperocchè questa sorta di figure, avendo ugual base, sono come l' altezze C D, E F; ed i centri loro di gravità sono dalla base distanti per una parte proporzionale di dette altezze: di maniera che O D a P

F sia come C D ad E F; e però la ragione dei detti momenti, composta di quella delle grandezze, e dell'altra delle dette distanze, è duplicata di ciascuna di esse; onde è come la ragione de' quadrati dell'altezza C D, E F. Il che ec.

Corollario. Quindi ancora può dedursi essere la ragione dei detti momenti duplicata di quella delle distanze da' sostegni, cioè come i loro quadrati.

Proposizione IV. Teorema IV.

I momenti delle resistenze nelle sezioni simili di qualche solido sono tra di loro, come i cubi dell' altezze.

Perchè la grandezza delle figure simili è in ragione duplicata di quella de' lati omologhi, o dell' altezze loro: si aggiunga la ragione delle distanze de' centri di gravità da' sostegni, la quale è pure la medesima con quella dell' altezze; ne risulterà la ragione composta di quella delle grandezze, e delle dette distanze, cioè (pel Corollario 2. della prop. 2.) quella de' momenti delle resistenze, uguale alla triplicata dell' altezze: cioè a quella de' cubi delle medesime; il che ec.

Corollario. Quindi i momenti delle sezioni di qualsivoglia solido rotondo sono come i cubi de' diametri d' esse sezioni.

Proposizione V. Teorema V.

Dei cilindri, e prismi ugualmente grossi, e disugualmente lunghi, le resistenze ad essere spezzati per traverso hanno reciproca proporzione delle lunghezze; o per meglio dire, le forze che si ricercano per ispezzare tali solidi, hanno reciproca proporzione delle lunghezze.

Poichè, posto che il peso E (Fig. VII.) *sia il minimo, che apposo in* C *serva per ispezzare in* B A, *colla leva* B C; *con leva minore di essa, maggior peso si richiederà per fare l' istesso effetto; e tanto maggiore, quanto la prima leva supera la seconda*: *non essendo altro il ridursi tal solido prossimo allo spezzarsi, che un farsi l' equilibrio tra la resistenza posta nel centro della base* B A, *ed il peso posto in diversi luoghi della lunghezza del solido, considerato come nulla pesante.*

L' intenzione del Sig. Viviani era, che questa proposizione si ponesse dopo la prima delle resistenze del Galileo, perchè questi non la prova, ma bensì la suppone per se nota nella proposizione quinta.

Proposizione VI. Teorema VI.

Se A (Fig. VIII.) *equilibra* B, *e* D *equilibra* C; *sempre il peso* A *al peso* D *ha la proporzione composta di quella della distanza* G E *alla* E H, *e di quella del peso* B *al peso* C, *o resistenza* B *alla* C, *e della distanza* L F *alla* F I.

Poichè il peso A *al peso* D *ha la proporzione composta del peso* A *al peso* B, *del* B *al* C *e del* C *al* D; *ma il peso* A *al* B *sta come* G E *ad* E H; *e il peso* B *al* C *sta come l'istesso* B *al* C, *o come la resistenza* B *alla* C; *ed il peso* C *al* D, *come la distanza* L F *alla* F I; *dunque il peso* A *al peso* D *è in ragione composta delle suddette proporzioni. Il che ec.*

Proposizione VII. Teorema VII.

Se saranno le due libre A B, C D, (Fig. IX.) *con i sostegni* E, F, *e colle contralleve* A E, C F, *uguali tra loro, e con i pesi, e resistenze* G, H, *che tra loro stiano, come le leve* E B, F D *omologamente; dico che se in* B, *e* D *si appenderanno i pesi* I, L *che equilibrino le*

resistenze G, H, *i detti pesi* I, L, *saranno uguali.*

Poichè, per l' antecedente, il peso I *al peso* L *ha la proporzione composta della* A E *alla* E B, *del peso* G *al peso* H, *cioè per supposizione, della* E B *alla* F D, *e della* F D *alla* F C; *ma anche l'*A E *alla* F C *ha la proporzione composta delle medesime linee, cioè della* A E *alla* E B, *della* E B *alla* F D, *e della* F D *alla* F C; *dunque il peso* I *al peso* L *sta come la* A E *alla* F C, *cioè gli è uguale; il che ec.*

Proposizione VIII. Teorema VIII.

Siano le due libre, come sopra, con i bracci uguali A E, C F, (Fig. x.) *e le resistenze* G, H, *che tra loro abbiano suddupla proporzione delle leve* E B, F D. *Dico, che il contrappeso* I *al contrappeso* L, (*da quali si equilibrano le* G, H) *ha suddupla proporzione delle leve reciprocamente prese, cioè della leva* F D *alla* E B; *o pure sta come la leva* F D *alla media* F M *tra* F D, *ed* E B.

Poichè per la propos. 6. *il peso* I *al peso* L *ha proporzione composta delle proporzioni di* A E *ad* E B, *e della resistenza* G *alla resistenza* H, *cioè della*

leva E B *ad* F M (*che ha suddupla proporzione della* E B *alla* F D) *e della leva* F D *alla* F C, *cioè della* F M *alla* F N) *quarta proporzionale dopo* F D, F M, F C) *ma ancora l'*A E *alla* N F *ha la proporzione composta delle medesime linee; e però come il peso* I *al peso* L, *così sta* A E, *ovvero* C F *ad* F N, *cioè* F D *ad* F M; *ma la* F D *alla* F M *ha suddupla proporzione della* F D *alla* E B, *per essere* F M *media proporzionale fra esse: dunque il peso* I *al peso* L *ha suddupla proporzione della leva* F D *alla* E B *reciprocamente prese, il che ec.*

Proposizione IX. Teorema IX.

Se sarà come il peso A (Fig. XI.) *al peso* B, *così la leva* D G *alla* F H, *sarà il contrappeso* I *al contrappeso* L, *come la* C D *alla* E F.

Poichè il peso I *al peso* A *sta come* C D *alla* D G, *ed il peso* A *al peso* B *sta come la* D G *alla* F H; *dunque per l' ugualità, il peso* I *al peso* B *sta come la* C D *alla* F H; *ma il peso* B *al peso* L *sta come* H F *ad* F E: *dunque per l' ugualità, il peso* I *al peso* L *sta come la* C D *alla* E F; *Il che si dovea dimostrare.*

Corollario. Agevolmente quindi si ri-

cava, che nelle premesse circostanze, essendo ancora C D uguale ad E F, saranno i contrappesi I, ed L tra di loro uguali, che è la prop. 7. già di sopra dimostrata.

Proposizione X. Teorema X.

Se nelle libre similmente divise C G, E H, (Fig. XII.) *ne' loro sostegni* D, F, *sarà come la resistenza* A *alla resistenza* B, *così il quadrato* D G *al quadrato* F H: *sarà il contrappeso* I, *che equilibra lo* A, *al contrappeso* L, *che equilibra* B, *come il quadrato* C D *al quadrato* E F.

Perchè presa la D M *media tra* C D, D G, *e la* F N *media tra* E F, F H, *sarà come il peso* I *alla resistenza* A, *così la* C D *alla* D G, *cioè come il quadrato* C D *al quadrato* D M: *e come la resistenza* A *alla* B, *così il quadrato* D G *al quadrato* F H, *cioè come il quadrato* D M *allo* F N (*il che appresso dimostrerassi*) *dunque per l' ugual proporzione come il peso* I *alla resistenza* B, *così il quadrato* C D *al quadrato* F N; *ma la resistenza* B *al peso* L *sta come la* F H *alla* F E, *cioè come il quadrato* F N *al quadrato* E F: *dunque di nuovo per l' ugual proporzione, il peso* I *al peso* L *starà,*

come il quadrato C D *al quadrato* E F. *Il che si dovea dimostrare.*

Non si trova nel MS. del Sig. Viviani la promessa dimostrazione di quell' assunto, cioè che il quadrato D G al quadrato F H sia come il quadrato D M al quadrato F N; ma si raccoglie ciò agevolmente, supposta la simile divisione delle due leve C G, E H in D ed F (da noi però aggiunta nel titolo di questa proposizione, la quale altrimenti non si potrebbe verificare) stante la quale, per essere le proporzioni di G D a D C, e di H F ad F E, tra di loro uguali, ancora le loro sudduple (e lo stesso sarebbe delle suttriple, suquadruple ec. e d' altre quantosivoglia ugualmente moltiplici, o summoltiplici di esse) saranno tra di loro parimente uguali; e però G D a D M sarà, come H F ad F N; e permutando, tanto esse, quanto i loro quadrati, saranno proporzionali.

Anzi si potrebbe quindi rendere la proposizione più generale, ed ancora dimostrarla più speditamente, dicendo, che se nelle due libre C G, E H, similmente divise da' sostegni D, F, le resistenze A, B saranno in qualsivoglia proposizione multiplice, o summoltiplice delle braccia D G, F H, o come i quadrati, cubi, ec. o radici quadrate cubiche ec. di esse: i contrappesi I, L averanno la stessa ragione ugualmente multiplice, o summoltiplice di quella delle braccia C D, E F, o saranno pa-

rimente come i quadrati; o cubi, o radici quadre, o cubiche ec. loro corrispondenti. Perchè essendo A ad I, come G D a D C, cioè come H F ad F E, per l'ipotesi, ovvero come B ad L, per l'equilibrio, sarà permutando, come A a B, così I ad L, onde se la prima ragione è multiplice, o summoltiplice di quella di D G ad F H, la quale permutando è la medesima con quella di C D ad E F, ancora la seconda ragione, cioè di I ad L, sarà parimente multiplice, o summoltiplice di quella di C D ad E F. Il che ec.

Ma se le due libre C G, E H non fussero proporzionalmente divise in D, F, supponendosi col nostro Autore, essere le resistenze A, B, come i quadrati delle braccia D G, F H, saranno i contrappesi I, L, come i rettangoli C D G, E F H; imperocchè starà I ad A, come C D a D G, o pure come il rettangolo C D G al quadrato D G; ed A a B sta come il quadrato D G al quadrato F H, e B ad L, come F H ad E F, cioè come il quadrato F H al rettangolo E F H, dunque per l'ugual proporzione starà I ad L, come il rettangolo C D G al rettangolo E F H; Il che ec.

Proposizione XI. Teorema XI.

Se le resistenze di due libre staranno come le dignità dello stesso grado delle contralleve, e le leve saranno uguali, i contrappesi staranno, come le dignità delle medesime contralleve d' un grado più alte.

In questa bellissima, ed universale proposizione intende l' autore per dignità le potestà algebraiche, come quadrati, cubi, biquadrati, sursolidi, ec. denominate da' loro esponenti 2. 3. 4. 5. ec. e dice, che essendo I ad L, come qualunque dignità della leva E B, denominata dal numero *m*, ad una simile della leva F D, (Fig. IX.) essendo le due E A, F C uguali, saranno i contrappesi G, H nella ragione delle dignità d' un grado più alte, appartenenti alle medesime leve E B, F D, cioè dènominate dal numero *m i*.

Imperocchè G ad I sta, come B E ad E A; I ad L sta, come la dignità di E B denominata dal numero *m* alla simile della F D; L ad H è come C F, ovvero A E ad F D; adunque G ad H ha ragione composta di B E ad E A, e di E A ad F D (le quali due faranno la sola ragione di E B ad F D) e di quella, che ha la dignità di E B, denominata da *m*, alla simile

dignità di F D; e però sta, come la dignità della E B un grado più alta, cioè denominata da *m i* alla simile dignità di F D: perchè queste tali dignità averebbero altresì la proporzione composta delle medesime proporzioni. Il che si dovea dimostrare.

Corollario I. Quindi se I ad L sta, come il quadrato E B al quadrato F D, sarà G ad H, come il cubo di E B al cubo di F D.

Corollario II. Viceversa, se G ad H ha la proporzione, che è tra qualsivogliano dignità dello stesso grado, di E B ad F D, saranno I, ed L nella proporzione delle dignità un grado più basse, delle medesime E B, F D.

Corollario III. Quando G ad H fosse in ragione suddupla delle E B, F D (che è quanto dire corrispondenti alle dignità di E B; F D, denominate dalla metà dell'unità) allora per essere I ad L, come le stesse dignità di E B, F D un grado più basse, cioè denominate da una metà meno del nulla, saranno reciprocamente in ragione suddupla di F D ad E B, come nella proposizione ottava.

Corollario IV. Ma essendo G ad H, come appunto E B ad F D (che sono le dignità semplici denominate dall'unità) per essere le I, ed L corrispondenti alle dignità delle medesime un grado più basse, cioè denominate dallo zero, dovranno essere tra

di loro nella ragione di ugualità, come proposizione settima.

Proposizione XII. Teorema XII.

Nei cilindri senza peso proprio, che si vanno allungando fuori del muro a squadra, i pesi equivalenti alle resistenze vanno scemando colla proporzione reciproca delle lunghezze.

Il peso F *equilibri la resistenza* A B, (Fig. XIII.) *ed il peso* G *la resistenza* C D; *dico che il peso* F *al peso* G *sta, come la* D E *alla* B E; *poichè congiunta la* E C, *convenga colla* B A *in* H. *Per la prop.* 6. *il peso* F *al* G *averà proporzione composta della contralleva* A B *alla leva* B E, *e della resistenza* A B *alla resistenza* C D, *cioè della* B E *alla medesima* B E, *e della leva* D E *alla contralleva* D C, *cioè della* E B *alla* B H; *ma ancora la* A B *alla* B H *ha proporzione composta delle medesime linee, cioè di* A B *alla* B E, *e della* B E *alla medesima* B E, *e della* B E *alla* B H; *adunque come il peso* F *al peso* G, *così la* B A (*ovvero la* D C) *alla* B H, *cioè la* E C *alla* E H, *o pure la lunghezza del cilindro* E D *alla lunghezza del cilindro* E B, *che è la proporzione reciproca proposta da dimostrarsi.*

Ciò era stato di sopra già dimostrato dal Sig. Viviani alla prop. 5. con maggiore speditezza, ma con minor rigore geometrico; onde non ho stimato superfluo l'apportare l' una, e l' altra proposizione.

Proposizione XIII. Teorema XIII.

Se saranno le due libre A B, C D, (Fig. XIV.) *sostenute in* E, F, *e le resistenze nell' estremità delle contralleve* A E, C F *siano* G, H, *che fra loro stiano, come i quadrati delle medesime contralleve, e siano le leve* E B, F D *uguali fra loro, ed i pesi* I, L, *che pareggino le dette resistenze: dico, che il peso* I *al peso* L *sta come il cubo di* A E *al cubo di* C F.

Si faccia, come A E *a* C F, *così* C F *ad* M, *e così* M *ad* N; *e si faccia come la* A E *alla* M, *così la* F D *alla* P: *che essendo la* A E *alla* M, *come la* C F *alla* N *sarà anche la* F D *alla* P, *come la* C F *alla* N; *e permutando la* F D *alla* C F, *come* P *alla* N; *e perchè il peso* I *al peso* L *ha proporzione composta di* I *a* G, *di* G *ad* H, *e di* H *ad* L; *e come* I *a* G, *così* A E *ad* E B, *cioè* A E *ad* F D; *e come* G *ad* H, *così il quadrato* A E *al quadrato* C F *per supposizione, cioè la linea* A E *alla* M, *cioè come la* F D *alla* P *per costruzione*: *sarà per l' u-*

gualità ordinata il peso I *all'* H, *come la* A E *alla* P; *ed il peso* H *al peso* L *sta*, *come la* D F *alla* F C, *cioè come la* P *alla* N, *come già si è dimostrato: dunque di nuovo per l'ugualità il peso* I *al peso* L *sta*, *come l'*A E *alla* N, *cioè come il cubo di* A E *al cubo di* C F; *il che ec.*

Ciò si deduce dalla generale proposizione undecima: come nel coroll. 1. di essa ho fatto vedere.

Proposizione XIV. Teorema XIV.

Stanti le medesime cose, se si farà, come il peso I *al peso* L, (Fig. XIV.) *così* D F *ad* F G, *ed in* G *si ponga il peso* K *uguale al peso* I; *dico, che il peso* K *si equilibrerà col peso* H: *e che la leva* B E *alla leva* F G *sarà come il cubo della contralleva* A E *al cubo della contralleva* C F.

Imperocchè essendo il peso I, *ovvero* K *al peso* L, *come* D F *ad* F G *reciprocamente, sarà uguale il momento d'ambidue i pesi* L, K; *ma il momento di* L *uguagliava quello di* H; *adunque ancora il momento di* K *uguaglierà quello di* H: *onde ambidue staranno in equilibrio: ma come si è dimostrato nella precedente, il peso* I *al peso* L *è come il cubo di* A E *al cubo di* C F; *ed ora si è fatto, come*

I *ad* L, *così* D F *ad* F G, *o pure* B E *ad* F G: *dunque* B E *ad* F G *è come il cubo di* A E *al cubo di* C F. *Il che si doveva dimostrare.*

Proposizione XV. Teorema XV.

Dimostrare altrimenti, e con maniera più generale la proposizione quarta del Galileo.

Siano i cilindri, o prismi, o altri solidi A C: E G (Fig. xv.) *ugualmente lunghi, e disugualmente grossi, e senza peso: ed i pesi* D, H *equilibrino le resistenze* A B, E F. *Dico, che il peso* D *al peso* H *sta, come il cubo del diametro* A B *al cubo del diametro* E F.

Poichè le C B A, G E F *sono due libre, come nella prop.* 13. *colle leve uguali* B C, F C, *e contralleve* A B, E F, *i quadrati delle quali stanno, come le resistenze* A B, E F; *ed i pesi* D, H, *le equilibrano; dunque staranno questi tra loro, come i cubi delle contralleve* A B, E F. *Il che si dovea dimostrare.*

Corollario I. Se le gravità specifiche de' cilindri A C, E G ugualmente lunghi saranno come i loro diametri; riusciranno i detti cilindri ugualmente resistenti, attesa

la propria gravità di essi. Imperocchè essendo di pari lunghezza, le loro moli saranno, come le basi, cioè come i quadrati de' diametri; ma le gravità specifiche sono come i medesimi diametri, per la supposizione; dunque i pesi assoluti di essi cilindri, i quali hanno la ragione composta di quella delle moli, e di quella delle gravità specifiche, saranno come i cubi de' diametri, o come le resistenze rispettive, colle quali contrastano i detti pesi in pari distanza, per essere applicati ne' centri di gravità d' essi cilindri, cioè nel mezzo delle leve uguali B C, F G; e però tanto averà di momento, e vigore il peso del primo cilindro contro la resistenza della propria base, quanto il peso del secondo contro la resistenza della sua.

Corollario II. Anzi ciò vale ancora in due coni, o conoidi, o piramidi, o altri solidi dello stesso nome, e tra di loro proporzionali colle proprie basi in pari lunghezza: quando le basi di essi non solamente siano simili; ma ancora similmente siano fitte nel muro.

Proposizione XVI. Teor. XVI.

I momenti de' pesi de' cilindri A B, (Fig. XVI.) *egualmente lunghi, contro le loro resistenze* C D, E F, *sono come le basi, e come i cilindri omologamente.*

Ciò è manifesto, perchè il peso di ciascuno è distante ugualmente dal sostegno; onde il momento dee corrispondere alla sola ragione de' pesi, o delle moli, o delle basi de' medesimi cilindri ugualmente lunghi, ed altronde supposti omogenei.

Proposizione XVII. Teor. XVII.

I momenti rispettivi, che hanno i cilindri, o prismi gravi dell' istessa materia, egualmente lunghi, e disegualmente grossi, in ordine a superare per traverso le resistenze delle loro grossezze, hanno fra loro reciproca proporzione dei diametri delle medesime grossezze, o basi.

Siano i due cilindri A C, D F, (Fig. XVII.) *quali si è detto, ed il più grosso sia* A C. *Dico, che il momento del proprio peso del cilindro* A C *per superare la resistenza della base* A B, *al momento del proprio peso del cilindro* D F *per vincere la resistenza della base* D E, *ha la medesima proporzione del diametro* D E, *all'* A B. *Per iscienza di che immaginiamoci i medesimi cilindri segnati* G, H *pendere dai mezzi* I, L *delle leve* B C, E F; *sono collocati ne' mezzi delle dette leve (rispondendo in tali luoghi i centri delle gravità loro) tanta forza faranno i cilindri* A C, D F *così distesi verso le loro resistenze, quanta ne fanno*

i soli G, H *loro eguali, pendenti in* I, L: *cioè i momenti de' soli* A C, D F *sono i medesimi de' soli* G, H *verso le dette resistenze. Intendasi di più . . .*

Sin qui il Viviani, a compire la di cui dimostrazione, secondo quel poco di barlume, che si cava dalla figura quivi abbozzata, convien proseguire così. Intendasi di più un cilindro N O P uguale al D E F, dal cui centro di gravità M posto nel mezzo di sua lunghezza penda un cilindro K eguale al primo A B C; e siano le rette D E, A B, Q R continuamente proporzionali. Sarà il momento rispettivo di G al momento pur rispettivo del peso uguale K, ed ugualmente lontano dal sostegno, come il cubo di N O, ovvero di D E, al cubo di A B, cioè come D E alla quarta R (imperocchè è tanto meno potente il momento di G a vincere la resistenza rispettiva della base A B, che non è il momento di K, per altro assolutamente uguale al primo, per superare la resistenza rispettiva della base N O, quanto viceversa questa resistenza, che si oppone al secondo, è minore di quella, che contrasta al primo, e lo rende però tanto meno efficace: sicchè tali resistenze essendo, per la prop. 4 del Galileo, o per la 15 di questo, proporzionali a cubi de' diametri, ancora i detti momenti saranno nella stessa ragione. Il momento poi del peso K al momento del peso H (contrastando ambidue in pari

lontananza coll' uguali resistenze N O, D E) sta come il peso al peso, cioè come i quadrati de' diametri A B, D E, o pure come R ad A B; dunque per l' ugualità ordinata, il momento rispettivo di G al simile momento di H, cioè quello del proprio peso di A B C contro la resistenza della sua base, al momento del proprio peso di D E F contro la resistenza della sua, è reciprocamente, come il diametro D E al diametro A B. Il che ec.

Proposizione XVIII. Teor. XVIII.

I momenti de' pesi de' cilindri eguali A, B (Fig. xviii.) *stanno fra loro, come l' altezze, ovvero in reciproca proporzione delle basi.*

Essendo uguali i pesi degli uguali cilindri, si varia il momento loro solamente in ragione delle distanze da' sostegni, che sono la metà delle lunghezze, che misurano l' altezza de' cilindri; e però sono proporzionali alle dette altezze, o reciprocamente corrispondono alle basi de' medesimi cilindri.

Proposizione XIX. Teor. XIX.

Nei cilindri, o prismi uguali, la resistenza dei più corti cresce in quintupla

proporzione dei diametri delle loro grossezze, e basi.

Siano i due cilindri uguali A B C, D E F. (Fig. XIX.) *Dico la resistenza del più corto* D F *alla resistenza del più lungo* A C *all' esser rotti, aver quintupla proporzione del diametro* D E *all'* A B. *Poichè delle* A B, D E *piglinsi le quattro* G, H, I, K *in continua proporzione. Per la quinta del Galileo, la resistenza del cilindro* D F *alla resistenza del cilindro* A C, *ha la proporzione composta della proporzione del cubo* D E *al cubo* A B, *e della lunghezza* B C *alla* E F, *cioè del quadrato* D E *al quadrato* A B, *per l' ugualità de' cilindri; ma come il cubo* D E *al cubo* A B, *così la linea* H *alla* B A, *ovvero la* K *alla* G; *e come il quadrato* D E *al quadrato* A B; *così la linea* G *alla* B A; *adunque la proporzione della resistenza del cilindro* D F *a quella dello* A C *si compone delle proporzioni di* K *a* G, *e di* G *a* B A, *delle quali si compone ancora la proporzione di* K *a* B A; *e però come la resistenza del cilindro* D F *a quella dello* A C, *così la linea* K *alla* B A; *ma la* K *alla* B A *ha quintupla proporzione della* K *alla* I, *cioè della* E D *alla* A B; *adunque la resistenza del cilindro* D F *a quella del cilindro* A C *averà quintupla proporzione del diametro* D E *al diametro* A B; *il che ec. Cioè, se un peso quanto* A B *pendente in* C *basta per rompere, e staccare la base* B A; *per ispez-*

zare in D E *bisognerà mettere in* F *un peso quanto* K *; e questo precisamente segue, considerando i solidi senza gravità, ec.*

Che se metteremo in conto le gravità loro, se saranno dell' istessa materia, come uguali, peseranno ugualmente; e se la gravità dell' A C *prossimamente serve per fare la rottura in* A B: *acciò segua l'effetto medesimo nel cilindro* D F, *il suo peso non sarà bastante; ma tanto più ce ne bisognerà, di quanto la linea* A B, *considerata come misura del peso* A C, *o* D F, *è superata dalla linea* K; *e tal aggiunta di peso andrà posta nel mezzo della leva* E F; *essendo che l'uno e l'altro cilindro gravita col suo centro di gravità sopra il mezzo delle due leve* B C, E F.

Se la gravità specifica del cilindro D F a quella del cilindro A C, sarà in quintupla proporzione de' diametri D E, A B; i cilindri uguali di mole A C, D F saranno ancora ugualmente resistenti; imperocchè i pesi loro assoluti (essendo in pari mole) saranno come le loro gravità specifiche, cioè in quintupla ragione de' diametri, onde saranno proporzionali alle resistenze delle loro basi, per questa proposizione.

Proposizione XX. Teor. XX.

I momenti de' cilindri, e de' coni d'ugual base sono tra loro, come i quadrati delle lunghezze.

Ciò è manifesto dalla proposizione 3 del Galileo, in cui questo stesso si dimostra ne' momenti de' prismi; e la stessa ragione vale in tutte le figure, che hanno il centro di gravità in una parte proporzionale dell' asse, e che altronde crescono in pari base, come le altezze loro: quali sarebbero non solamente i cilindri, i coni, e le piramidi, ma ancora le conoidi paraboliche, e le mezze sferoidi, i prismi eretti sopra parabole di varie maniere ec.

Proposizione XXI. Teor. XXI.

I momenti de' pesi de' cilindri simili contro le attaccature delle loro basi, stanno fra loro, come il quadrato della lunghezza d' uno al quadrato della terza proporzionale dopo le lunghezze dei dati cilindri.

Siano i cilindri simili A B C, D F E (Fig. xx.) *e si faccia, come la lunghezza* D E *alla lunghezza* A C, *così questa ad una terza* I. *Sarà il momento del peso* F E *al momento del peso* B C, *come il quadrato* D E *al quadrato* I; *imperoc-*

chè continuando la stessa proporzione ai termini M, O, *sarà il momento di* F E *al momento di* B C *in ragione composta di quella de' pesi, o moli di tali cilindri, che è quella del cubo* D E *al cubo* A C, *cioè la stessa, che della* D E *alla quarta proporzionale* M, *e della ragione delle lunghezze* D E, A C, *o pure di* M *ad* O; *adunque il primo momento al secondo sta come* D E *ad* O; *ma per essere le cinque grandezze* D E, A C, I, M, O *continuamente proporzionali, la mezzana* I *è media proporzionale fra le due estreme* D E, O; *onde quella a questa è come il quadrato* D E *al quadrato* I; *dunque il momento del cilindro* F E *al momento del simile cilindro* B C *è come il quadrato della lunghezza del primo, al quadrato della terza proporzionale dopo le due lunghezze de' cilindri proposti. Il che ec.*

Perchè la ragione del quadrato A C al quadrato I è doppia di quella della linea A C alla I; e la D E alla I di nuovo ha doppia ragione delle A C, D E, sarà la ragione del quadrato D E al quadrato I quadrupla di quella delle lunghezze A C, D E; e però i momenti de' cilindri simili sono in ragione quadrupla di quella delle lunghezze, o de' diametri loro. Nè ciò si oppone alla prop. 6 del Galileo, in cui dice, essere i momenti de' suddetti cilindri *in triplicata proporzione dei diametri delle basi loro*, e però *in sesquialtera ra-*

gione delle resistenze delle medesime basi; le quali (assolute, o rispettive che siano, come si vedrà nella prop. seguente) sono *in duplicata ragione dei medesimi loro diametri*; imperocchè ivi si parla de' momenti rispettivi di essi cilindri, nella considerazione de' quali secondo la defin. 4 si debbe aver riguardo alla lunghezza delle contralleve, alle quali si applicano le resistenze opposte a' pesi de' cilindri, co' quali contrastano; ed essendo le dette contralleve proporzionali alle lunghezze delle leve, cioè delle lunghezze, nelle quali sono collocati i pesi de' cilindri, vengono a defalcare dalla ragione de' momenti assoluti (di cui qui dal Sig. Viviani si tratta) una delle semplici ragioni delle lunghezze; onde di quaprupla resta solamente tripla appresso il Galileo la ragione de' momenti rispettivi da lui considerati della ragione de' diametri medesimi, ed appresso il Viviani, senza il detto defalco, rimane la ragione de' momenti assoluti quadrupla di quella delle lunghezze, ovvero de' diametri de' cilindri.

Proposizione XXII. Teor. XXII.

Le resistenze, anco respettive de' cilindri, o prismi simili, astraendo dalla gravità loro, stanno come le loro basi, o come le loro grossezze.

I due cilindri simili siano A B C, D E D. *Dico che la resistenza del cilindro* A' C *alla resistenza dell' altro* D F, *ha l' istessa proporzione della base* A B *alla base* D E. *Per dimostrare ciò, piglinsi nella proporzione del diametro* A B *al diametro* D E, *le due* G, H *continue proporzionali. Per la quinta del Galileo, la resistenza di* A C *alla resistenza di* D F *averà proporzione composta del cubo di* A B *al cubo di* D E, *e della lunghezza* E F *alla* B C; *ma il cubo* A B *al cubo* D E *sta come la linea* A B *alla quarta* H; *e la lunghezza* E F *alla* B C *sta per la similitudine de' cilindri come la* E D *alla* B A, *cioè come la* H *alla* G; *adunque la proporzione delle dette resistenze si compone della proporzione dell'* A B *alla* H, *e di* H *alla* G; *delle quali proporzioni si compone ancora la proporzione della* A B *alla* G; *e però la resistenza di* A C *a quella di* D F *sta, come la* A B *alla* G, *cioè come la base* A B *alla base* D E, *che è quello che si doveva dimostrare.*

Sicchè i cilindri, o prismi, e solidi simili tanto più sono resistenti, quanto più sono grossi; sempre però astraendo la loro gravità ec.

Per esempio, se per superare la resistenza A B *si ricerca in* C *un peso almeno quanto è la linea* B A: *per superare la resistenza* D E, *bisognerà in* F *un*

peso, quanto è la G, *terza proporzionale delle* A B, D E.

Onde si potrà dire, che de' solidi simili i più corti sieno a proporzione più resistenti dei lunghi; poichè essendo il solido C A *al solido* D F, *come la prima* A B *alla quarta* H: *se la forza d'un peso, quanto è la* A B, *serve per superare, posto in* C, *la resistenza* B A, *dovrebbe un peso, quanto la* H, *posto in* F, *essere bastante per vincere la resistenza* D E; *ma non basta, volendovi un peso, quanto la* G, *la quale è maggiore di* H; *dunque ec.*

Proposizione XXIII. Quesito I.

Cercare la proporzione de' momenti di due cilindri, quali si sieno, resultanti dalle loro gravità, e dalle loro lunghezze, rispetto alle loro resistenze.

Sono in ragione composta di quella de' quadrati fatti da' diametri delle basi loro, e di quella delle lunghezze presa una volta (dalle quali due risulta la ragione de' pesi) e di quella delle stesse lunghezze prese un' altra volta (per conto delle distanze de' centri di gravità d' essi da' loro sostegni, le quali distanze sono ad esse lunghezze proporzionali) che vuol dire in duplicata ragione sì de' diametri, come delle lunghezze: o pure in duplicata ra-

gione de' rettangoli, che passano per l'asse, ovvero delle superficie curve, che sono a' detti rettangoli proporzionali, come è manifesto, ed è stato dimostrato dal Torricelli.

Proposizione XXIV. Quesito II.

Cercare la proporzione delle resistenze di due cilindri voti, ugualmente lunghi.

Siano le canne vote A B F, G H M, (Fig. XXI.) i di cui centri C, I; gli esteriori cerchi, da' quali si comprendono, A B, G H; gl'interiori O D, N K; e tirinsi le D E, K L perpendicolari a' diametri ne' punti D, K. Saranno le resistenze della prima, e della seconda in ragione di quella, che ha il quadrato D E al quadrato K L, e di quella del semidiametro C B al semidiametro I H.

Imperocchè le resistenze sono in ragione composta delle sezioni medesime, cioè dell' armille, per cui sono congiunte, e delle distanze dall' appoggio, sopra di cui si tenta di fare la rottura, per lo coroll. 2 della propos. 2 ma le dette armille sono come le differenze del cerchio esteriore dall' interiore, o come l' eccesso del quadrato C B sopra il quadrato C D, all' eccesso del quadrato I H sopra il quadrato I K: che è quanto dire, come il quadrato D E al quadrato K L; e le dette

distanze sono i semidiametri C B, I H; dunque le resistenze di queste canne sono nella di già detta ragione. Il che ec.

Proposizione XXV. Quesito III.

Cercare la resistenza di due cilindri voti, qualunque si siano.

Alle proporzioni assegnate nella precedente si aggiunga la reciproca delle lunghezze; e si averà, per la 5 del Galileo, la proporzione desiderata delle resistenze di dette canne, composta delle due addotte di sopra, e della contraria delle lunghezze H M, B F. Il che ec.

Proposizione XXVI. Quesito IV.

Cercare la proporzione delle resistenze di due cilindri voti simili.

Essendo simili le canne A B F, G H M della figura antecedente, averanno le resistenze proporzionali a' soli quadrati E D, L K: o pure a' rettangoli B D A, H K G; imperocchè, per la similitudine dei cilindri, l' altre due ragioni de' semidiametri C B, I H, e delle lunghezze prese reciprocamente, H M, B F (le quali sono, come gli stessi semidiametri I H, C B) compongono la ragione di ugualità, da cui

nulla si aggiugne, che alterar possa le resistenze.

Corollario. Quindi se i rettangoli, o quadrati suddetti fussero uguali, cioè quando le basi sode armillari delle canne saranno di uguale estensione, essendo altronde i cilindri, da cui sono cavate, simili, averanno uguale resistenza.

Proposizione XXVII. Quesito V.

Cercare la proporzione delle resistenze in due cilindri, uno voto, e l'altro pieno, qualunque si siano.

Suppongasi il cilindro A B F nella suddetta figura rimaner voto, ma l'altro G H M essere tutto pieno; è manifesto, che le resistenze loro saranno in ragione composta di quella del quadrato D E al quadrato I H (che è quella delle sezioni, cioè dell'armilla D B A al cerchio G H) e delle distanze C B, I H dagli appoggi, e delle lunghezze H M, B F prese reciprocamente.

Proposizione XXVIII. Quesito VI.

Cercare lo stesso ne' cilindri simili, l'uno voto, e l'altro pieno.

Saranno le resistenze loro, come il quadrato D E al quadrato I H, imperoc-

chè l' altre due ragioni, per la simiglianza de' cilindri, sono reciprocamente le medesime; e però si compensano.

Coroll. I. Quando D E sarà uguale ad I H; cioè che il rettangolo, o armilla D B A pareggerà rispettivamente il quadrato, o cerchio del raggio I H, cioè essendo il sodo della canna uguale alla base del cilindro, saranno ambidue d'uguale resistenza, purchè sieno simili nella figura esteriore.

Coroll. II. E perchè ad un dato cilindro si possono ritrovare infiniti cilindri simili, di base maggiore e maggiore in infinito, al diametro delle quali si può applicare perpendicolarmente una retta uguale al semidiametro del minore; si potranno quindi determinare infinite canne simili, che averanno il sodo della base uguale alla base del dato cilindro, e ciascuna sarà di uguale resistenza con esso.

Coroll. III. Anzi ancora determinare si possono infinite canne di uguale resistenza, le quali siano di base soda disugualissime; purchè si faccia, come il cubo del raggio I H del cilindro pieno, al prisma eretto sopra il quadrato D E (corrispondente alla quantità della sezione armillare del voto, determinata a capriccio, anche in un semidiametro C B arbitrario, purchè di essa D E sia maggiore) coll' altezza del raggio B C: così la lunghezza H M del dato cilindro alla lunghezza B F

della canna di ugnale resistenza, che si cercava; imperocchè per la precedente le ragioni componenti queste resistenze saranno appunto reciproche; onde ci daranno la ragione di ugualità.

Proposizione XXIX. Quesito VII.

Data la lunghezza A (Fig. XXII.) *fare un cilindro uguale al dato* B C.

Facciasi, come la A *alla* B, *così il diametro* C *del dato cilindro alla retta* E; *e sia* D *media tra le due* C, E. *Dico* D *essere il diametro del cerchio del cilindro* D A *uguale al dato* B C; *perchè sta la* A *alla* B, *come la* C *alla* E, *cioè il cerchio* C *al cerchio* D; *saranno, per la* 25 *del* 12 *i cilindri* A D, C B *uguali; che è quello, che si aveva a trovare.*

Proposizione XXX. Quesito VIII.

Data la lunghezza A D, *fare un cilindro uguale alla data canna* F C B G.

Sia, per l'antepenultima del Galileo, la C B (Fig. XXIII.) *diametro del cerchio uguale alla ciambella* C B F, *e facciasi, come l'* A D *alla* B G, *così la* C B *ad un' altra* A E; *dico* A E *essere il diametro della base del cilindro, che si cerca: essendo manifesto, che il cilindro di* D A, A E, *è uguale al cilindro di* B G, B

C; *ma questo è uguale alla canna, perchè il cerchio di* C B *è uguale alla ciambella; adunque il cilindro* D A E *è uguale alla canna. Il che è quello, che ec.*

Proposizione XXXI. Quesito IX.

Data la lunghezza A B (Fig. XXIV.) *sotto di essa fare una canna uguale alla data* C D E.

Facciasi sotto la lunghezza A B *per la precedente il cilindro* A F B *uguale alla canna* C D E, *e trovisi tra il diametro* F A, *ed il doppio* A H, *la media proporzionale* A G; *ed intorno al diametro* G A *descrivasi un cerchio, ponendovi concentrico un altro* M L *uguale ad* F A. *Dico, la ciambella* G M A L *essere la base della canna, che si cerca; perciocchè sta, come* A F *al doppio* A H, *così il cerchio* F A *al cerchio della media* G A; *dunque il cerchio* F A, *ovvero* L M, *è la metà del cerchio* G A; *e però la ciambella* G L M A *è uguale al cerchio* F A; *onde, per la comune altezza* A B, *la canna* G L A B *è uguale al cilindro* F A B, *cioè alla canna* C D E. *Il che ec.*

Questo problema è capace d'infinite soluzioni, imperocchè trovato che sia il cilindro F A B (Fig. XXV.) uguale alla data canna C D E, nella data lunghezza A B, basta d'intorno al cerchio F A far-

vene un altro N P concentrico, di qualsivoglia grandezza ad arbitrio; e conducendo le due tangenti Q F S, V A T nell' estremità del diametro A F, stenderle fino attanto, che seghino la circonferenza del cerchio esteriore N P ne' punti Q, S, V, T; che condotta Q V segata in R ad angoli retti dal diametro N P parallelo alle dette tangenti; e coll' intervallo O R conducendo l' altro cerchio R X, averemo la ciambella N R X P uguale al medesimo cerchio A F: per essere la differenza dei quadrati N O, O R, cioè il rettangolo N R P uguale al quadrato R Q, ovvero O F; e però altresì la differenza de' cerchi N O, R O (cioè la ciambella N R X P) uguale al cerchio del raggio O F; e però la canna, che all' altezza A B si facesse sopra la detta ciambella, uguaglierebbe il cilindro fatto sopra il cerchio A F alla medesima altezza: cioè sarebbe uguale all' altra data canna C D E; e ciò in infinite maniere, potendo il diametro N P del cerchio esteriore essere determinato ad arbitrio.

Proposizione XXXII. Quesito X.

Sotto la lunghezza A B (Fig. XXIV.), *fare una canna uguale al cilindro sodo* C D E.

Facciasi per la propos. 29. *nella lunghezza* A B *il cilindro* F A B *uguale al dato* C D E, *ed il cerchio* A G (*secondo la costruzione della precedente*) *doppio della base* F A (*ovvero* L M *postavi concentrica*) *dico la ciambella* G L A *essere la base di quella canna, che si cerca; imperocchè il cilindro* C D E *è uguale al cilindro* F A B: *ma la canna* G L A B *è uguale al cilindro* F A B; *adunque l'istessa è uguale al cilindro* C D E. *Il che ec.*

Questo ancora può farsi in infinite maniere, secondo la nota fatta alla precedente, dove si è insegnato di fare quante ciambelle si vogliano, e di qualunque diametro della loro esteriore convessità, tutte uguali al cerchio A F, il quale colla data lunghezza A B si suppone, che pareggi il dato C D E; si può quindi ancora dedurre, potersi fare una canna della medesima materia, e lunghezza d'un'altra, ma per cagione della maggiore grossezza, che ne slontana il centro della base dall'appoggio, più e più resistente in infinito.

Proposizione XXXIII. Teor. XXIII.

Le lunghezze massime de' cilindri orizzontalmente fitti nel muro, che sieno d'uguale grossezza, ma di differente gravità

in ispecie, non istanno in reciproca proporzione delle medesime gravità.

Imperocchè in tal caso, essendo le moli de' cilindri d' ugual base, come le lunghezze loro, e queste essendo reciproche della gravità in ispecie, i cilindri averebbero le moli reciproche delle loro specifiche gravità; e però sarebbero di peso assoluto uguale; onde i momenti loro sarebbero proporzionali alle lunghezze, quando altronde i momenti delle resistenze nelle loro uguali sezioni sarebbero gli stessi; e però i più lunghi cilindri si proverebbero di minor resistenza.

Proposizione XXXIV. Teor. XXIV.

Allora tali cilindri sono d' egual momento verso le loro resistenze, quando i quadrati delle loro lunghezze hanno reciproca proporzione delle gravità in ispecie; ovvero che le lunghezze hanno reciproca proporzione delle gravità assolute.

Siano i cilindri ugualmente grossi A B C, H G L (Fig. XXVI.), e la gravità in ispecie del cilindro G L a quella del cilindro B D sia reciprocamente, come il quadrato della lunghezza A D al quadrato della lunghezza H L. Dico essere uguale il momento d' entrambi verso le resistenze loro: imperocchè si tagli dal cilindro B D

la parte B F ugualmente lunga, e però di mole eguale al cilindro G L; sarà il peso assoluto G L al peso assoluto B F, o pure (per l'uguale distanza dagli appoggi H, A) il momento di G L al momento di B F, come la gravità specifica di quello alla gravità specifica di questo; cioè, per l'ipotesi, come il quadrato A D al quadrato H L, ovvero A F; ma ancora il momento del cilindro B D al momento del cilindro B F sta come il quadrato A D al quadrato A F, per la prop. 20. dunque il momento di B D uguaglia il momento di G L. Il che si dovea dimostrare.

Perchè poi si è veduto, essere il cilindro G L al cilindro B F, quanto al loro peso assoluto, come il quadrato A D al quadrato A F; ed essendo il cilindro B D allo stesso B F quanto al peso, come la lunghezza A D alla lunghezza A F; ne segue, che il peso assoluto G L al peso assoluto F B ha doppia proporzione di quella, che ha il peso B D al peso B F; cioè, che l'assoluto peso B D è mezzano proporzionale tra i pesi assoluti G L, B F; onde ancora l'assoluto peso G L all'assoluto peso B D starà, come il peso B D al peso B F, cioè reciprocamente, come la lunghezza A D alla lunghezza A F, ovvero H L; e però si verifica ancora la seconda parte di questa proposizione. Il che ec.

Si potrebbe ancora cercare con questa occasione, di due cilindri ugualmente lunghi, qual proporzione debbano avere le grossezze, e le gravità specifiche, per riuscire ugualmente resistenti. E trovo, che i diametri delle basi debbono essere, come le gravità specifiche; imperocchè ciò essendo, la ragione composta della mole alla mole (che in pari lunghezza de' cilindri è come i quadrati de' diametri) e della gravità specifica dell' uno alla gravità specifica dell' altro, cioè per l'ipotesi, del diametro al diametro, sarà la ragione de'cubi d'essi diametri; ma il peso assoluto al peso assoluto ha la ragione composta di quella delle moli, e di quella delle gravità specifiche; dunque nel nostro caso sarebbe il peso assoluto dell' uno al peso assoluto dell'altro, come il cubo del diametro del primo al cubo del diametro del secondo; cioè, per la prop. 15. come la resistenza rispettiva della base del primo alla resistenza rispettiva della base del secondo; che però essendo essi pesi, mercè dell' uguale lunghezza dei cilindri, ugualmente distanti da' loro sostegni, averanno i momenti loro proporzionali a' momenti delle resistenze delle loro basi, supposte altronde omogenee. Il che ec.

Che se più generalmente volessimo investigare due cilindri di varia lunghezza, e grossezza, e di differente gravità specifica, ugualmente però resistenti, basterebbe fare, che i loro diametri fossero in ra-

gione composta di quella delle gravità specifiche, e di quella de' quadrati delle lunghezze: come agevolmente dalle cose sopraddette si può inferire, ma non merita il conto stenderne più proposizioni, sì per non uscire da' limiti del trattato del Sig. Viviani; e sì perchè ad ogni modo fisicamente sarà impossibile, che la resistenza di più materie differenti di specie sia omogenea; onde l'ipotesi di simiglianti conclusioni non si troverebbe in pratica conforme alla natura, se non in casi rarissimi.

Proposizione XXXV. Quesito XI.

Perchè un prisma triangolare più facilmente si pieghi voltandolo colla superficie allo in giù, che quando posa su l'angolo.

Non è la medesima forza, che si richiede a superare la resistenza del triangolo A, *che del triangolo* B (Fig. XXVII.), *essendo per altro triangoli eguali, e simili; e lo stesso può dirsi d'altre figure simili, ed uguali, ma che tocchino in diversi luoghi: stante che i centri di gravità di dette figure non sono sempre nelle medesime distanze da' sostegni.*

Sicchè la difficultà di rompere il prisma triangolare A sopra la base, sta alla difficultà di romperlo nella disposizione B,

dove posa su l'angolo, come la distanza del centro di gravità del triangolo dalla sua base alla distanza del medesimo dalla cima; come si può raccogliere dalla prop. 1. di questo trattato; il che nel caso nostro dà una proporzione suddupla; ed in altri generi di figure dà altre proporzioni dipendenti da quelle, in cui si dividono gli assi da' loro centri di gravità.

Proposizione XXXVI. Quesito XII.

Se essendo eguali, e dissimili le figure, che servono di base a' prismi, segue lo stesso?

Alle volte senza dubbio seguirà il medesimo: quando cioè si varj la distanza del centro di gravità delle figure uguali, e dissimili, da' loro appoggi, sopra de' quali si cerca di fare la piegatura, o lo strappamento; ma non già sempre: potendo, non ostante la dissimiglianza dell'uguale figura, mantenersi la medesima distanza dall'appoggio; come, per cagione d'esempio, sia il quadrato A B C D (Fig. XXVIII.), il cui centro di gravità H; onde la sua distanza dal sostegno della base sia H I. Si faccia l'altezza E I tripla della H I, e la base G F sesquiterza della B C; dico che il triangolo G E F sarà uguale al quadrato A B C D, e sarà d'uguale resistenza,

ancora rispettiva, con esso, per avere il centro H comune al medesimo, e però ugualmente lontano dall' appoggio B C, ovvero G F; imperocchè posta F G uguale ad 8, la B C sarà uguale a 6, l' I H eguale a 3, la E I uguale a 9, la G I uguale a 4; e però tanto la perpendicolare E I moltiplicata per G I, metà della base G F del triangolo, fa 36, quanto il lato B C, moltiplicato per se stesso dà il quadrato A B C D parimente uguale a 36, sicchè il triangolo è uguale al quadrato: ed altronde, per essere la distanza H I un terzo dell' altezza E I, sarà il punto H centro di gravità del triangolo, siccome era ancora del quadrato; sicchè l' una, e l' altra figura dovrà ugualmente resistere.

Proposizione XXXVII. Teor. XXV.

La proporzione de' momenti ne' coni ugualmente lunghi, o uguali di mole, o simili, o di base uguale ec. è la stessa, che l' assegnata ne' cilindri.

In questa proposizione ho ridotte, per brevità, 4. proposizioni distintamente proposte dal nostro Autore; potendosi provare col medesimo, o simil progresso delle passate, senza multiplicare figure, e parole di soverchio.

Proposizione XXXVIII. Teor. XXVI.

Se saranno due leve divise proporzionalmente, le potenze sostenenti saranno, come le resistenze.

Siano le due leve A C, F H (Fig. XXIX.) proporzionalmente da' loro sostegni divise in B, G. Dico, che la potenza E applicata in C a sostenere la resistenza D posta in A, alla potenza K, la quale collocata in H regge l' altra resistenza I posta in F, sta come la stessa resistenza D all' altra I.

Imperocchè, in vigore dell' equilibrio, sta la potenza E al peso, o resistenza D, come A B a B C, cioè come F G a G H, per l' ipotesi, o di nuovo, per l' equilibrio, come K ad I; dunque sta E a D, come K ad I; e permutando, E a K, come D ad I. Il che ec.

Proposizione XXXIX. Teor. XXVII.

Le forze per ispezzare un cono fitto nel muro, vanno scemando colla proporzione, che scemano le sezioni.

Sia il cono D B C (Fig. XXX.) fitto nel muro colla sezione B D, il cui centro

A; ed in tale stato la sua resistenza sia pareggiata dal peso, o potenza E. Poi s'intenda l' istesso cono impegnato similmente nel muro colla sezione I G, il di cui centro F, e la resistenza di questa resti uguagliata dal peso, o potenza K. Dico essere E a K, come B D ad I G; Imperocchè le due leve A B C, F G C sono similmente divise dagli appoggi B G, per la similitudine de' triangoli A B C, F G C; dunque le forze E, K sono come le resistenze assolute poste in A, ed F, per l' antecedente proposizione: ma le resistenze assolute sono, come le sezioni medesime D B, I G; adunque le forze E, K sono proporzionali alle dette sezioni. Il che si dovea dimostrare.

Corollario. È manifesto, che il medesimo accade in qualsivoglia Piramide, le cui sezioni parallele alla base sono ancor esse, come i cerchi d' un cono ugualmente alto, e segato ne' medesimi punti della sua lunghezza; il che è avvertito ancora dal Sig. Viviani nel dimostrare altrimenti questa medesima proposizione, distesa altrove, come appresso si vedrà.

Proposizione XL. Teor. XXVIII.

Nei coni, o piramidi fitte nel muro a squadra, i contrappesi equivalenti alle

resistenze delle sezioni di diverse lunghezze, crescono come le sezioni medesime, considerato il cono, o la piramide senza peso: cioè riescono, come i quadrati delle lunghezze.

Sia il cono fitto nel muro A B G (Fig. xxxi.), *ora fuori del muro, quanto* E G, *ed ora quanto* F G; *ed il peso* H *equilibri la resistenza* C D, *il peso* I *la resistenza* A B. *Dico, che il peso* H *al peso* I *sta come la sezione* C D *alla* A B.

Perchè presa la G L *terza proporzionale dopo le* G F, G E, *e da* L *tirata la* L M *parallela alle* A E, C F, *la quale si congiunga colla* G A *prolungata in* M, *averà il peso* H *al peso* I *la proporzione composta della contralleva* C F *alla* F G, *e della resistenza* C D *alla* A B, *cioè del quadrato* C D *al quadrato* A B, *o pure del quadrato* G F *al quadrato* G E, *cioè della* G F *alla terza proporzionale* G L, *e della leva* G E *alla contralleva* E A, (*per la prop.* 6.) *cioè della* G L *alla* L M; *ma anche la* C F *alla* M L *ha la proporzione composta delle medesime* C F *ad* F G, *ed* F G *a* G L, *e* G L *ad* M L; *dunque il peso* H *al peso* I *starà come la* C F *alla* M L, *cioè come il quadrato* C F *al quadrato* A E, *ovvero come la sezione* C D *alla* A B, *cioè come il quadrato della lunghezza* G F *al quadrato della lunghezza* G E; *il che ec.*

Potea questa stessa proposizione, siccome ancora la precedente, che è la medesima, dedursi immediatamente dalla proposizione 10. la quale a tale oggetto si vede essere distesa dal Viviani nel suo MS. imperocchè, essendo le leve F D G, E B G divise similmente da' sostegni D B, e le resistenze D C, B A essendo come i quadrati delle lunghezze D G, B G, saranno i pesi equivalenti alle dette resistenze, cioè i pesi H, I proporzionali a' quadrati delle contralleve D F, B E, o come le sezioni medesime D C, B A, ovvero come i quadrati stessi delle lunghezze D G, B G, o degli assi F G, E G; il che, ec.

Proposizione XLI. Teor. XXIX.

Diversi solidi similari dell' istessa materia, uguali di mole, e in conseguenza di peso, e della medesima lunghezza, e di resistenza assoluta uguale, ricercano forze diverse per romperli, non ostante che il centro delle loro resistenze sia egualmente in tutti lontano dal sostegno.

Sembra questo anzi un paradosso, che un Teorema, di cui non è così facile a rintracciarne il vero, e legittimo senso: nè altra prova si vede ad esso essere soggiunta nel MS. del Sig. Viviani, che una

figura in cui si esprimono 4. piramidi quadrangolari, fitte colla base in uno stesso muro verticale, altre dirette, altre inclinate, ma tutte colla cima terminanti in una stessa linea parallela al detto muro; dal quale sbozzo non si può raccorre principio veruno atto ad illustrare il concetto dell'Autore, ma sembra egualmente strano in confronto di cotale disegno, che senza di esso. Imperocchè, come mai puote verificarsi, che diversa forza si richiegga allo spezzamento di due solidi omogenei, della stessa figura, e grandezza, quando la resistenza loro assoluta si suppone la medesima, e dall'appoggio ugualmente lontana, e che i pesi, o forze che s'applicano per superarla, o sia nel centro di gravità di detti solidi (il quale è in una stessa linea verticale parallela al muro, ed in conseguenza in una stessa distanza da' sostegni) o nella cima, ed estremità di tali corpi lontanissima dal muro, in cui sono impegnati (che vale a dire in una medesima distanza, misurata dall'altezza comune ad essi, come è necessario, che sia, a volere che in ugual base, ugual mole, e peso ritengano) adoperano la stessa leva, ricevendo dall'appoggio sopra le direzioni loro una medesima perpendicolare?

Ad ogni modo, non potendomi persuadere, che il nostro Autore ciò proponesse inavvedutamente, e senza verun fondamento, mi sono studiato d'indovinare il

pensiero di lui, riflettendo ad una diversa direzione, che può considerarsi nella resistenza de'solidi, la quale non è mai stata da verun Autore, ch'io sappia, avvertita; e pure, mettendola in conto, varia di molto il momento della resistenza, e serve appunto a scoprire, e salvare il sentimento del Viviani, proponendolo nella seguente maniera.

Si equilibri il peso H (Fig. XXXII.), pendente dalla cima d'una piramide, cono, prisma, conoide, o altro solido fitto nel muro colla sua base A B C D, a cui sia perpendicolare l'asse G E, colla resistenza di detta base: ed il peso o si equilibri similmente colla resistenza d'una ugual base, simile, e similmente posta, I K L M, d'un altro solido uguale al primo, e dello stesso genere di figura: ma il di cui asse N P sia obliquo al piano di detta base. Dico, che il peso H al peso O, sarà come il seno totale al seno dell'angolo R P Q, che fa l'asse del solido obliquo colla sua base, ovvero col muro medesimo, in cui sta fitto.

Da'centri delle basi E, P si mandino le perpendicolari E F, P R sopra gl'infimi lati confinanti col muro B C, K L, sopra il taglio de'quali si dee far la rottura. Si tiri ancora la perpendicolare R Q dal punto d'appoggio R sopra l'asse obliquo N P, e si conducano altresì F H, R S perpendicolari sopra le direzioni G H, N S dei

pesi attaccati alle cime G, N. È manifesto, che saranno uguali, non solo le due E F, P R, ma ancora le F H, R S. E perchè la forza, che tiene insieme attaccate le fibre de' solidi secondo ciò, che si è detto alla defin. 8. si stima dal Galileo, e dagli altri meccanici riunita nel centro di gravità, di quella sezione, in cui debbe seguire la rottura; ne segue, che nell'asse G E, O N P, il quale passa pel centro di gravità di tutte le sezioni parallele alle base del solido, si dee considerare raccolta la resistenza di tutte le sue parti; e però nel detto asse conviene, che si stenda la direzione di quella forza, che fa la resistenza de' solidi. Per la qual cosa sarà F E nel primo, e Q R nel secondo solido la vera distanza de' sostegni F, R dalle direzioni delle resistenze d' essi solidi. E giacchè in caso d' equilibrio esser debbe il peso H alla resistenza della base A C del primo solido, come F E ad F H (cioè ad R S) e similmente la resistenza d' essa base A C, o dell' uguale I L (che assolutamente è la medesima) sta al peso O, come R S ad R Q; dunque per l' ugualità ordinata, sarà il peso H al peso O, come E F, ovvero R P ad R Q: cioè, come il seno totale al seno dell' angolo R P Q, col quale resta inclinato al muro l' asse P N del solido obliquo; il che dovevasi dimostrare.

Corollario I. Quindi è, che in diverse inclinazioni le resistenze rispettive d' un

medesimo solido saranno come i seni d' esse inclinazioni.

Corollario II. Le resistenze di sezioni diverse averanno la ragione composta e della grandezza d' esse, e delle distanze dei loro centri da' sostegni (come nel corollario 2. della prop. 2. di questo) e de' seni dell' inclinazione de' solidi col muro, in cui sono fitti, e della reciproca delle lunghezze d' essi solidi, misurate nella distanza perpendicolare, dalla cima loro alla base: come si cava dalla quinta del Galileo intesa più generalmente, e da ciò, che in questa si è dimostrato; di maniera che essendo le sezioni di due solidi S, *s*, le distanze de' centri dal sostegno D, *d*; i seni dell' inclinazioni I, *i*; le lunghezze d' essi solidi L, *l*, saranno le resistenze del primo, e del secondo solido, come i prodotti S D I *l*, *s d i* L.

Corollario III. Se le sezioni, e le distanze de' loro centri di gravità, o i seni dell' inclinazioni de' solidi saranno come le lunghezze di essi, il resto essendo uguale, riusciranno le resistenze de' solidi uguali. Come per esempio, se sopra lo stesso cerchio A S (Fig. xxxiii.), il di cui centro è C vi saranno due solidi, l' uno retto A B S, l' altro inclinato A F S; di maniera che l' asse C B sia uguale all' asse C F, onde le loro cime B, F sieno nell' arco d' un quadrante circolare B F G; lo stesso peso, che sospendendosi in B sa-

rebbe precisamente bastante a vincere la resistenza della sezione A S, ancora appeso dalla cima F basterebbe a vincere la resistenza della medesima sezione della base comune; imperocchè tirata F E perpendicolare all'orizzonte, sarà la lunghezza C B, ovvero C F alla lunghezza C E, come la C S raggio della base alla S D condotta sopra la direzione F C della resistenza ad angoli retti: cioè come il seno totale al seno dell'inclinazione dell'angolo F C G, che fa l'asse del solido colla parete, di maniera che (ritenendo i simboli del corollario precedente) per essere in questo caso L ad *l*, come I ad *i*, sarà *i* L uguale ad I *l*; ed essendo la stessa sezione circolare, e la medesima distanza dal sostegno C S in ambedue i solidi, e *s d* uguale ad S D; dunque S D I *l* è uguale ad *s d i* L, cioè le resistenze respettive dell'uno, e dell'altro solido sono uguali.

Proposizione XLII. Teorema XXX.

In diversi piani inclinati, le resistenze de' medesimi solidi si diversificano nel volerli rompere col medesimo peso; ed ancora considerando i soli momenti de' solidi.

Secondo lo sbozzo d' una figura segnata dall'Autore appresso a questa proposizio-

ne; credo che si debba esporre nella maniera, che segue.

Sia il solido A B G (Fig. xxxiv.) impiegato in varj muri K A, K A diversamente inclinati all'orizzonte, ed il peso H sia abile a superarne la resistenza, quando è fitto il solido nel muro verticale: il peso O sia quello, che la vinca nel muro inclinato; e dal sostegno B al punto G, a cui si attaccano i detti pesi, conducasi la retta B G; siccome siano le B H, B I perpendicolari dal detto sostegno sopra la direzione de' pesi. Dico che il peso H al peso O starà reciprocamente, come B I a B H, che sono i seni degli angoli B G I, B G H; ed in conseguenza le resistenze del solido in questi varj siti saranno diverse, e diversa impressione riceverebbero da un medesimo peso. E lo stesso vale quando in luogo de' pesi aggiunti, si considerasse il momento del solo peso del solido, raccolto nel suo centro di gravità.

Imperocchè il peso H all'assoluta resistenza del solido raccolta nel centro C dalla sua base, sta come C B a B H; e l'assoluta resistenza medesima sta al peso O, come B I a C B; dunque per la ragione perturbata, il peso H al peso O sta, come B I a B H; il che dovea dimostrarsi.

Che se intenderassi il solido A B G tanto prolungarsi, che il punto G rimanga lo stesso col suo proprio centro di gravità; allora prescindendo dal peso aggiunto, e

considerando la gravità sola del solido raccolta in G, ed operante colla direzione G H, ovvero G O, è manifesto, che volendo supporre equilibrata la resistenza del solido in tutti questi siti col proprio peso, non potrebbe questi essere il medesimo, ma dovrebbe similmente variare in ragione reciproca de' seni B I, B H, corrispondenti agli angoli d'inclinazione B G O, B G H; e però quando suppongasi essere lo stesso peso del solido, averà viceversa i suoi momenti misurati dalla ragione diretta de' medesimi seni B H, B I. il che ec.

Corollario I. La più gran resistenza respettiva sarà d'un solido applicato al piano orizzontale, come accade a quello, cui tende a rompere, o a schiacciare il peso R, il quale uguagliar debbe la resistenza assoluta di esso. La minima resistenza respettiva sarà d'un solido applicato al muro verticale: e negli altri piani, secondo che saranno più all'orizzonte inclinati, si troverà sempre resistenza maggiore.

Corollario II. E viceversa nel piano verticale avrà un solido il maggior momento, e disposizione a rompersi col proprio peso, e con uno stesso alla sua cima attaccato; e nel piano orizzontale avrà il minimo de' suoi momenti, siccome ne' piani di mezzo l'averà mediocre; e tanto maggiore, quanto più al verticale si accosta, ma tanto minore, quanto più all'orizzontale si avvicina.

Proposizione XLIII. Prob. XIII.

Si assegni la proporzione de' pesi minimi rompenti il medesimo solido col proprio peso: e qual linea descrivano l' estremità.

Si è già veduto nell' antecedente, qual proporzione abbiano i minimi pesi, da' quali si spezzi il medesimo solido, in varj piani diversamente inclinati fitti a squadra colla stessa sezione; ma nel medesimo piano diversamente inclinandosi un dato solido, varierà la sezione, in cui seguir dee la rottura (siccome in un cilindro, o cono la base non si manterrebbe circolare, ma diventerebbe ellittica) onde crescerebbe per tal capo la resistenza nella ragione sì dell' ampiezza di tal sezione, e sì della distanza, che averebbe il suo centro di gravità dal sostegno; ma scemerebbe viceversa il suo momento, a misura del seno dell' inclinazione (per le cose dette nella prop. 41.) siccome nella stessa proporzione scemerebbe ancora il momento del peso attaccato alla cima del solido.

Sia per cagione d' esempio il cilindro G D K (Fig. XXXV.) fitto a squadra in un muro verticale, e la resistenza della sua base circolare G L D sia equilibrata dal peso M. Poi s' intenda l' asse A C del ci-

lindro muoversi attorno al punto C, rimanendo nel suo piano verticale, e venire nel sito C B, sicchè il cilindro sia H B O, il quale sega lo stesso muro nella base ellittica H L E; e la resistenza di essa venga pareggiata dal peso N. Dico, che M ad N ha la ragione composta della reciproca delle distanze E I, D K, per cui i sostegni E, D sono lontani dalle direzioni d' essi pesi, e di più di quella de' semidiametri C D, C E, che risultano nelle dette sezioni in ambidue i casi, e che sono le lontananze del centro della resistenza C, dalli due appoggi D, E.

Imperocchè, per cagione dell' equilibrio, starà il peso M all' assoluta resistenza delle base G L D, come C D ad D K; e la resistenza assoluta G L D all' assoluta resistenza H L E sarà come la sezione alla sezione, cioè (per essere ad ambidue comune il semidiametro L C) come C D a C E: e finalmente la resistenza assoluta di questa sezione L H E (per la prop. 41.) al peso N, che ne uguaglia il momento, è come la distanza E I alla distanza E F, o pure all' uguale B O, cioè alla C D; dunque per l' ugual proporzione sarà il peso M al peso N in ragione composta di E I a C D, di C D a D K e della C D alla C E; ma le prime due ragioni formano quella di E I a D K; dunque il peso M al peso N starà in ragione composta della reciproca delle distanze E I, D K, e della

diretta de' semidiametri C D, C E; il che dovea dimostrarsi.

Corollario. Il peso M al peso N, cioè la resistenza del cilindro orizzontale alla resistenza dell'obliquo, sta come il quadrato del semidiametro C D al quadrato del semidiametro C E. Imperocchè E I a D K, ovvero a C A, sta come C P a C B, ovvero come F E (cioè C D) a C E, essendo simili i triangoli C F E, C B P, dunque la ragione composta di E I ad D K, e di C D a C E è duplicata di questa, o pure è la stessa, che la ragione del quadrato C D al quadrato C E, e però i detti pesi M, N, o resistenze de' solidi corrispondenti, sono come i quadrati de' semidiametri C D, C E.

Quanto all' altra particolarità del presente quesito, cioè di sapere, qual linea descrivano l' estremità di questi solidi, non è così agevole il determinare, che cosa l'Autore desiderasse per ciò di rinvenire; ma da una figura ivi disegnata, in cui si esprime un piano orizzontale, ed un cilindro da esso in giù pendente a piombo, con un altro obliquamente inclinato, accennando, che sieno i minimi, abili a sostenersi in tale positura, pare che il suo pensiero fusse d' indagare a qual linea terminino l' estremità di varj cilindri, o coni, o altri solidi di un medesimo genere, diversamente inclinati allo stesso piano, e condotti alla precisa lunghezza, in cui regge-

re si possano; ma perchè, secondo che si supponessero l'uno dall'altro più, o meno distanti, la curva, in cui anderebbero a finire, sarebbe diversa; io li supporrò tutti coll'asse, che passi per lo stesso punto del piano, in cui sono fitti; e di più stenderò la speculazione (oltre all'orizzontale accennato nella bozza del Sig. Viviani) ancora al verticale; dal che sarà facil cosa l'immaginarsi quello che debba succedere in un piano di mezzo tra l'una, e l'altra posizione.

Sia dunque il piano orizzontale D A G, (Fig. xxxvi.) dentro a cui fitto a squadra si trovi il solido D B M (sia cono, o cilindro, o conoide ec.) la di cui base D M, e l'asse A B, in cui sia il suo centro di gravità I; e sopra la stessa base sia obliquamente disposto il solido D Q M dello stesso nome, il di cui asse A Q, ed il centro di gravità E; dico che i centri di gravità E, I (supponendo ciascuno di questi solidi, per mezzo del proprio suo peso, equilibrarsi colla resistenza della base comune) saranno in una curva I E P di tal natura, che condotte le E F, I K parallele all'orizzonte, e terminate dalla verticale D C, che passa per l'estremo D della base, saranno sempre il rettangolo A E F uguale al rettangolo A I K; e dico ancora, che le cime B, Q di detti solidi terminano alla curva B Q G simile all'altra I E P, la quale riferendosi alla retta H L

T parallela a C D, ma da essa distante in maniera, che C B a B H sia come I A ad A B, ovvero E A ad A Q (essendo gli assi di detti solidi proporzionalmente divisi da' loro centri di gravità) sarà parimente il rettangolo A Q L uguale al rettangolo A B H.

Si conduca D V perpendicolare sopra l' asse Q A, ed E X perpendicolare a D M; pareggiandosi dunque il momento del solido D Q M col momento della resistenza nella base D M, sarà il peso di esso all' assoluta resistenza D M, ovvero al peso del solido D B M, che direttamente tirando l' uguaglia, come reciprocamente la D V (distanza della direzione Q A della resistenza del sostegno D) alla D X (distanza della direzione del centro d' esso solido dal medesimo sostegno) cioè alla F E; ma il peso del solido D Q M al peso dell' altro D B M, sta come la mole alla mole, cioè (per avere la base D M comune) come l' altezza Q R all' altezza B A; dunque Q R a B A sta come D V ad F E; e permutando Q A a D V, cioè (per la similitudine de' triangoli Q R A, D V A) Q A ad A D e come B A ad F E; e di nuovo permutando Q A a B A (ovvero E A ad I A, che sono parti proporzionali degli assi tagliate da' loro centri di gravità) sarà come A D ad F E; onde il rettangolo A E F sarà uguale al rettangolo D A I

K; e però la natura della curva I E P dipende dall' uguaglianza di detti rettangoli.

E perchè i rami A Q, A B sono proporzionalmente divisi in E, I; è manifesto, essere la curva B Q G, condotta per le cime dei detti solidi della stessa natura della curva I E P; e che però dipende da una simile uguaglianza di rettangoli A Q L, A B H; siccome in fatti, essendo H B a B C, ovvero L N ad F O, come B A ad A I, cioè come Q A ad A E, o come Q N ad E O; ancora la somma degli antecedenti L Q alla somma de' conseguenti F E starà nella stessa ragione di H B a B C; e permutando L Q ad H B sarà come F E a B C, cioè a D A; ovvero (per le cose già dimostrate) come I A ad A E, che è quanto dire come B A a Q A; e però il rettangolo A Q L sarà uguale al rettangolo A B H; il che ec.

Quanto alla descrizione di questa curva; se col centro A, e semidiametro A B nella precedente figura si descriverà l' arco circolare B S, ed inclinata qualunque A S si prolungherà fino al concorso della H L in T; basterà dividere A S in Q in maniera, che le tre linee T A, A Q, Q S siano continuamente proporzionali; che il punto Q sarà nella curva cercata; imperocchè componendo sarà A S, ovvero B A ad A Q, come Q T a T A, cioè come Q L ad A Z, o pure ad H B; e però il rettangolo A B H sarà uguale al rettangolo A

Q L, come ricerca la natura della curva B Q G, proposta da costruirsi.

Ma se il muro D A R (Fig. XXXVII.) sarà verticale, ed in esso parimente siano fitti, il solido D B M retto, e l'altro D Q M obliquo, sopra la comune base, il di cui diametro D M, ambidue minimi tra gli atti a rompersi in vigore del proprio peso, e però equilibrati colla resistenza della base suddetta. Dico che la curva, in cui terminano le cime di tali solidi, è di tale natura, che sempre al rettangolo A Q R uguaglia il quadrato A B, e la curva I E P, la quale passa pel centro di gravità dei detti solidi, è simile all' altra: sicchè ancora il rettangolo A E X pareggia il quadrato A I.

Imperocchè il peso del solido M Q D alla resistenza della base M A D sta per le cose sopra dimostrate, come D V a D F, cioè ad E X, o pure (per la simiglianza de' triangoli D V A, E X A) come D A ad A E; ma la resistenza d'essa base M A D è al peso del solido M B D, come D K, cioè A I a D A; dunque per l'ugualità perturbata il peso del solido M Q D a quello del solido M B D sta come I A ad A E; ma il primo peso al secondo sta come l'altezza Q R all'altezza A B; dunque Q R ad A B sta, come I A ad A E, cioè (per la proporzionale divisione degli assi fatta ne' centri di gravità de' solidi dello stesso genere) come A B ad A Q;

e però il rettangolo A Q R uguaglia il quadrato di A B; il che era da dimostrarsi.

Ed essendo il rettangolo A E X al rettangolo A Q R, come il quadrato A E al quadrato A Q, cioè come il quadrato A I al quadrato A B: l'ugualità de' conseguenti ci assicura dell'ugualità degli antecedenti; e però la curva, che passa per tutti i centri di gravità di detti solidi, ci darà sempre il rettangolo A E X uguale al quadrato A I; onde sarà simile all'altra, che passa per le cime de' medesimi. Il che ec.

Per la costruzione poi di questa curva, descrivendo col centro A, ed intervallo A B l'arco circolare B S, la cui tangente sia B T, ed inclinata qualsivoglia segante A T, basterà interporre fra le due A T, A S la mezzana proporzionale A Q: che sarà il punto Q della curva B Q G ricercata; imperocchè la similitudine de' triangoli A B T, A Q R, ci darà Q R ad A B, come A Q ad A T, cioè come A S (ovvero A B) ad A Q; e però il rettangolo A Q R sarà uguale al quadrato A B, come richiede la natura di essa curva.

Proposizione XLIV. Quesito XIV.

Data la linea A B (Fig. XXXVIII.) *centrica* (cioè che sia la distanza del centro di gravità B d' un solido C D dal centro A della sua base C E) *di un solido fitto a squadra nel piano orizzontale* C G *colla sua base* C E *di maniera, che col proprio peso equilibri la resistenza di detta base: e data l' inclinazione dell' asse* A F *d' un altro solido, che abbia la medesima base, e sia similare al primo: determinare la lunghezza, che debbe avere, acciocchè aggravando col proprio peso contro il sostegno* C, *equilibri appunto la medesima resistenza* C E (quando ancora si prescinda dalla diversa direzione, che in tal sito pare che acquisti la forza della resistenza.

Dal centro di gravità del solido B *si tiri la* B F *parallela alla* A G, *che concorra coll' asse inclinato in* F, *e per* F *la* F C *parallela alla* B A: *dipoi alla* C A *si applichi un parallelogrammo rettangolo, uguale al rettangolo* G A C, *e che ecceda d' una figura quadrata; e sia questo il rettangolo* C H A; *e da* H *sia tirata* H I *parallela alla* G F, *che concorra in* I *colla* A F. *Dico che la* A I *è la centrica del solido ricercato.*

Perchè essendo il rettangolo C H A *uguale al rettangolo* G A C, *sarà come* H C *a* C A, *così* G A *ad* A H, *ovvero* F A *ad* A I, *o pure come il solido della centrale* A F, *al solido della centrale* A I, *per esser questo su la medesima base* C E; *ma il solido della centrale* A F *è uguale al solido della centrale* A B *essendo su la stessa base, e della medesima altezza; dunque* H C *a* C A *starà, come il solido della centrale* A B *al solido della centrale* A I, *cioè come il peso assoluto del primo al peso assoluto del secondo: ma il peso assoluto del solido della centrale* A B *è la misura della resistenza assoluta di* C E; *adunque la resistenza assoluta di* C E *alla forza assoluta, cioè al peso del solido della centrale* A I *starà, come* H C *a* C A, *cioè come la leva alla contralleva, e però si farà l'equilibrio tra questo e quella. Il che ec.*

E perchè il rettangolo G A C *è uguale al rettangolo* C H A, *sarà* G A *ad* A H, *come* H C *a* C A; *e dividendo* G H *ad* H A, *come* H A *ad* A C; *ovvero (tirata* C L *parallela ad* A B, *e prolungata la* F A *in* L*) come* F I *ad* I A, *così* I A *ad* A L; *quella curva adunque, che partendosi da* B *verso* G, *segherà le rette* A F *in* I, *in modo che (le medesime prolungate sino a* C L*) stia* L A *ad* A I, *come* A I *ad* I F, *sarà quella, che darà tutti i centri de' solidi similari, che*

col momento del proprio peso saranno bastanti a pareggiare la resistenza della propria base, qualunque si sia la loro inclinazione. E tal linea curva sarà asintota alla A G.

Se fusse stato riveduto questo trattato, ed a perfezione ridotto dal suo Autore, egli senza dubbio primieramente accorto si sarebbe, che la curva B I, da lui qui descritta, è una vera Iperbola d'Apollonio; imperocchè, stando H C a C A, come G A ad A H, ovvero come F G (cioè B A) ad H I, il rettangolo dell' estreme C H I uguaglia quello delle mezzane C A B; e però la curva B I è una Iperbola, che ha per asintoti le linee C K, C G.

In secondo luogo forse averebbe osservato, che la vera distanza della resistenza, che è nella base C E dal suo sostegno C, non è la C A in riguardo al solido inclinato colla direzione dell' asse A F, in cui si raccoglie l' azione della resistenza del solido, passando per tutti i centri di gravità delle sezioni parallele a detta base C E, come si è avvertito nella prop. 41. ma bensì cotale distanza è la C M, perpendicolare alla detta direzione della resistenza, secondo l' asse del solido I A; il che fa degenerare l' Iperbola B I nella curva da noi sopra descritta nella prop. antecedente, la quale fu da me distesa, prima che giungessi a vedere nel MS. del Sig. Viviani questa sua costruzione; ed io non ho voluto omet-

tere nè l' una nè l' altra: parendomi quella ben fondata secondo i principj meccanici, e questa almeno verificandosi, astraendo da quella particolare considerazione della direzione diversa, che sembra avere la resistenza in un solido obliquo (il perchè ho aggiunta al titolo della proposizione del Sig. Viviani quell' ultima parentesi) tanto più, che questa nuova considerazione delle direzioni nelle resistenze potrebbe non riuscire a gusto di tutti, e però era dovere, che secondo l' ipotesi di chi ancora credesse universalmente esercitarsi la forza della resistenza secondo una direzione sempre perpendicolare alla base, non ostante qualunque obliquità dell' asse d' un solido, si determinasse la curva, in cui terminano i centri, o le cime de' solidi precisamente abili a sforzare la comune resistenza della base, come acutamente ha fatto qui il nostr'Autore.

Proposizione XLV. Teor. XXXI.

Dimostrare in altra maniera la proposizione 14. *del Galileo: cioè che nel cuneo* A B G, (Fig. XXXIX.) *il quale posa sul muro con uno de' suoi parallelogrammi, le resistenze all' esser rotto crescono, come le lunghezze del cuneo fuori del muro.*

Equilibri H *la resistenza* A B, *ed* I

la resistenza C D. *Dico che* H *ad* I *sta come* A G *a* G C.

Poichè H *ad* I *ha proporzione composta della* E A *ad* A G, *e della resistenza* A B *alla* C D, *cioè della linea* E A *alla* C F, *ovvero della* A G *alla* G C, *e della* G C *alla* C F (*per la prop.* 6.) *ma anche* E A *a* C F *ha proporzione composta delle medesime* E A *ad* A G, A G *a* G C, G C *a* C F; *dunque* H *ad* I *sta come* E A *a* C F, *cioè come la lunghezza* A G *alla lunghezza* G C; *il che ec.*

Proposizione XLVI. Quesito XV.

Nel cuneo triangolare, F A B (Fig. XL.) *quando il peso* N *fusse bastante a spezzare* A F *fitta nel muro*: *perchè più tosto il medesimo peso, anzi ancora minore, non dee prima spezzarlo in un' altra sezione* O P *più vicina all' estremo* B, *dove è sempre minor resistenza, col fare il cuneo in que' luoghi di mezzo sostegno di se medesimo?*

Perchè dovendosi strappare non direttamente, ma obliquamente, conviene che si spezzi sopra di un sostegno veramente immobile, o pure che si muova all' opposte parti, cioè allo insù, mentre il peso N, ed il carico del muro sopra F, premono all' ingiù, o almeno trattengono gli estre-

mi del solido, che non si lascino trasportare dall' azione del sostegno, che spinge all' insù. Ma nè il punto O, nè verun altro peso tra A, e B, è sostegno immobile, o che abbia veruna azione da spignere insù, anzi è disposto a secondare il moto della leva A B; discendendo col peso N, e piegandosi in arco circolare d' intorno al centro A, il quale solo è veramente immobile; adunque lo spezzamento non può farsi in veruna sezione intermedia O P, ma unicamente nella A F, a cui sta sottoposto il taglio del muro,

Del resto, se talmente ferma fusse, e rigida la porzione F O, che non potesse cedere, ed accompagnare in alcuna maniera il moto della parte O B, potrebbe il peso N sforzare la sola parte O B, alla separazione sopra il sostegno stabile, che la fermezza del solido porgerebbe in tal caso nel punto O. E credo che talvolta ciò succeda, vedendosi delle mensole di pietra sporte in fuori del muro, tronche, o mozze assai lontano dal taglio d' esso muro, in cui erano impegnate.

Proposizione XLVII. Quesito XVI.

Se i cunei triangolare, e semiparabolico debbano spezzarsi più tosto nella sezione A M (Fig. XLI.) *fatto dalla minima*

retta A M *sopra la linea* F M B, *dove è minore la resistenza, che nella* A F: *perchè la resistenza assoluta non può essere tanta in* A M, *quanta in* A F, *per essere rettangoli della medesima altezza, che sono come le basi* A M, A F: *ed anco perchè la contralleva, dove tali potenze sono poste, è minore in* A M, *che in* A F, *presa la distanza dallo stesso sostegno* A, *che è nel taglio del muro, in cui si suppongono i cunei impegnati.*

Dee seguire la rottura regolarmente parlando, nella A F, sezione comune del cuneo colla parete, in cui è fitto: perchè quantunque sia minore la resistenza di A M, che di A F, la parte F M non essendo premuta contro il sostegno, e tenuta fissa nel muro, come si è avvertito essere necessario nella proposizione precedente, potrà secondare il moto dell' altra parte contigua M B, tirata giù dal peso N: onde cedendo, e piegandosi con essa, non potrà da lei separarsi; e però non seguirà la rottura nella retta perpendicolare A M, se non in caso, che la materia F A M fosse talmente ferma, e rigida, che non potesse nella maniera accennata cedere, e piegarsi: perchè allora sarebbe, come se il cuneo M A B fosse fitto in un muro A M inclinato all' orizzonte, e lo spezzamento seguirebbe secondo le regole di sopra assegnate nella prop. 42.

Proposizione XLVIII. Teor. XXXII.

Se il cuneo triangolare A B C D (Fig. XLII.) *sarà fitto nel muro perpendicolarmente, ora colla sezione* A B, *ed ora con l' altra* E F *parallela all'* A B; *appendendo all' estremità* D *un peso* H, *che sia bastante appunto a spezzare il solido nella sezione* A B; *ed un' altra* G, *che sia appunto bastante per superare la resistenza della sezione* E F, *dico, che i pesi* G, *ed* H *sono eguali: cioè a dire, che detto cuneo è per tutto egualmente resistente, considerato senza peso.*

Dividasi la A I *per mezzo in* O, *e giungasi la* D O, *segante la* E N *per mezzo in* Q. *Da* O Q *si alzino* O P, Q R, *che congiungano i punti* P R, *centri di gravità delle sezioni* A B, E F (*le quali, per essere parallelogrammi, che hanno eguali altezze* A L, E M, *daranno le distanze de' centri loro* P O, R Q *eguali*) *Ora qui le* D Q, D O *saranno le leve, dove in* D *sono applicate le forze, o pesi* G H; *e le* Q R, O P *le contralleve, all' estremità delle quali in* R, P *sono applicate le resistenze* E F, A B; *ed il peso* G *pareggia la resistenza* E F, *ed il peso* H *equilibra la resistenza* A B. *Dunque per la prop.* 6 *il peso* G *al peso* H *ha la proporzione composta dalla con-*

tralleva R Q *alla leva* Q D, *e della resistenza* E F *alla* A B, *cioè della linea* E N *alla* A I (*essendo parallelogrammi con eguali altezze, che sono fra loro come le basi*) *cioè della leva* D Q *alla* D O, *e della leva* D O *alla contralleva* O P; *ma anche la* Q R *alla* O P *ha la proporzione composta delle medesime* R Q *a* Q D, Q D *a* D O, *e* D O *ad* O P, *dunque il peso* G *al peso* H *sta come la* Q R *alla* O P; *e però sono tra loro uguali. Il che si dovea dimostrare.*

In altra maniera si discorra così; il momento della resistenza A B *al momento della resistenza* E F *sta, per la prop.* 2 *come la base* A I *alla base* E N, *cioè come la leva* O D *alla* Q D, *ovvero come il momento del peso* H *pendente dalla leva* O D, *al momento del medesimo peso pendente dalla leva* Q D; *e permutando il momento della resistenza* A B, *al momento del peso* H *pendente da* O D, *starà come il momento della resistenza* E F, *al momento del medesimo peso* H *pendente da* Q D; *ma i primi momenti sono uguali, dunque ancora i secondi; e però il medesimo peso, che pendente da* O D *equilibra la resistenza* A B, *pendendo da* Q D *equilibrerà la resistenza* E F. *Il che ec.*

Più speditamente, per la prop. 7 essendo nelle leve P O D, R Q D, le uguali braccia P O, R Q; ed in esse le resistenze proporzionali alle contralleve O D,

Q D: da uguali contrappesi H, G si equilibreranno le suddette resistenze; il che ec.

Proposizione XLIX. Teor. XXXIII.

Se il cuneo parabolico A D I (Fig. XLIII.) *sarà fitto nel muro perpendicolarmente, ed il peso* L *equilibri la resistenza* A D, *il peso* M *la resistenza* E G, *dico che il peso* L *al peso* M *ha suddupla proporzione della leva* I P *alla leva* I Q: *che è la proporzione reciproca delle lunghezze di detto cuneo.*

Poichè la resistenza A D *alla* E G *sta come la linea* A B *alla* E H; *ma la* A B *alla* E H *ha suddupla proporzione del quadrato* A B *al quadrato* E H, *cioè della leva* Q I *alla* I P; *e le contralleve* Q O, P N, *all' estremità delle quali sono appese le resistenze* A D, E G, *sono uguali; dunque per la prop.* 8 *il peso* L, *che equilibra la resistenza* A D, *al peso* M, *che equilibra la* E G, *ha suddupla proporzione della leva* I P *alla leva* I Q; *il che si dovea dimostrare.*

Corollario. *Prendendo la* I R *media fra* I P, *ed* I Q, *la quale ad* I Q *ha parimente suddupla proporzione della* I P *alla* I Q, *sarà il peso* L *al peso* M, *come* I R *ad* I Q, *o come* I P *ad* I R: *onde se per pareggiare la resistenza* A D *si ricerca il peso* L, *per pareggiare la* E G,

quando il cuneo sarà più corto fuori del muro, ci vorrà un peso M, *che sia maggiore della* L: *e tanto maggiore, quanto la media* R I *tra le due leve* Q I, P I, *è maggiore dell'l minor leva* P I.

Proposizione L. Teor. XXXIV.

Se saranno due leve divise da' loro sostegni in maniera, che le distanze, dove si hanno da costituire le potenze, abbiano tra di loro doppia proporzione delle distanze, dove saranno le resistenze: le quali resistenze siano tra loro in doppia proporzione delle loro distanze medesime; le potenze sostenenti fra loro saranno, come le distanze delle resistenze.

Sia B C a G H (Fig. xxix.) in ragione doppia di A B ad F G; e sia ancora la resistenza D alla resistenza I nella stessa doppia ragione A B ad F G; le forze sostenenti E, K saranno come A B ad F G; imperocchè starà E a K in ragione composta di E a D, di D ad I, e di A K; ma la prima ragione è per l'equilibrio quella di A B a B C; la seconda per l'ipotesi quella di B C a G H (essendo tanto l'una, che l'altra doppia della ragione di A B ad F G) e la terza quella di G H ad F G; dalle quali ne risulta quella di A B ad F G; dunque E a K sta come A B ad F G. Il che ec.

Corollario. Quindi è chiaro, che lo stesso accaderebbe, se fusse D ad I, come B C a G H, quantunque l'una, e l'altra ragione non fusse doppia di quella di A B ad F G: seguendone subito, che sia E a K, come A B ad F G, in vigore della precedente dimostrazione, indipendente da quella circostanza di ragione doppia, per cui si limita il Teorema del Sig. Viviani.

Proposizione LI. Teor. XXXV.

Le forze per ispezzare un conoide parabolico, fitto nel muro, accorciando il conoide, scemano colla proporzione, che scemano i diametri delle sezioni.

Perchè nel conoide B C D (Fig. XLIV.) parabolico, segato col piano I G parallelo alla base, sta la distanza A C alla distanza F G, (nelle quali si costituiscono le potenze E, K abili a vincere la resistenza di dette sezioni, spezzando in esse il solido) in doppia ragione delle distanze A B, F G, nelle quali si applicano le resistenze, e queste sono come i cerchi D B, I G, i quali altresì hanno doppia ragione delle stesse distanze A B, F G; dunque per la precedente sarà E a K, come A B ad F G, o pure come tutto il diametro D B al diametro I G; il che era da dimostrarsi.

Proposizione LII. Teor. XXXVI.

Se nelle libre A B C, O D E (Fig. XLV.) *in cui i pesi* F, G, H, I *sono equilibrati, sarà il peso* F *al peso* H, *come il quadrato del vette* A B *al quadrato del vette* O D, *e la contralleva* B C *alla contralleva* D E *sia come il cubo del vette* A B *al cubo del vette* O D, *saranno i pesi* G, *ed* I *tra loro uguali.*

Si pigli D K uguale a B C, ed il peso L posto in K, si equilibri con H; dunque il peso G al peso L, per la prop. 13 starà, come il cubo di A B al cubo di O D, cioè per l'ipotesi, come la distanza B C, ovvero D K, alla distanza D E; ma per essere uguali i momenti de' pesi I, ed L, i quali si equilibrano collo stesso H, starà ancora I ad L, come D K a D E; adunque G ad L sta, come I ad L; e però G, ed I sono uguali; il che ec.

Proposizione LIII. Teor. XXXVII.

La conoide nata da una parabola cubica, essendo fermata colla base nel muro, resiste ugualmente in qualsivoglia delle sue sezioni.

Se nel rettangolo A B (Fig. XLVI.) *e nel triangolo* A C B *siano applicate le*

rette D H E, F I G, *e tra le due* D E, E H *si piglino due medie proporzionali* E L, E M; *e similmente fra le due* F G, G I *le due medie* O G, N G, *e così sempre, i punti* B, O; L, A *saranno nel contorno d' una parabola cubica; di maniera che* D E *ad* E H, *o pure* A C *ad* E H, *cioè* C B *a* B E, *sarà come il cubo* D E, *o pure* A C, *al cubo* E L; *e ciò sempre. Ora dico, che se questa parabola cubica si ravvolgerà d' intorno all' asse* B C, *il solido rotondo* A P B *da esse generato, essendo fitto colla base nel muro, e da esso tirandolo fuori a qualsivoglia lunghezza, resisterà sempre ugualmente. Imperocchè il cerchio generato dal raggio* A C *al cerchio fatto dal raggio* L E, *cioè la resistenza assoluta del primo alla resistenza del secondo, è come il quadrato del braccio della leva* A C *al quadrato del braccio della leva* L E; *ma la contralleva* B C *alla contralleva* B E *è come il cubo della leva* A C, *al cubo della leva* L E; *dunque per la precedente, lo stesso peso, che attaccato in* B *supera la resistenza della sezione* A C, *supererà ancora la resistenza di qualsivoglia altra sezione* L E. *Il che dovea dimostrarsi: avvertendo però, che tutto questo si verifica, astraendo dal proprio peso di detta conoide.*

O pure in altra maniera si discorra così. Il momento della resistenza del cer-

chio A C *al momento della resistenza del cerchio* L E *sta, come il cubo* A C *al cubo* L E (*per la prop.* 4) *cioè, per la natura del solido, come* C B *a* B E, *o come il momento d'uno stesso peso attaccato in* B, *nella distanza* B C, *tale che pareggi il momento della resistenza* A C, *al momento del medesimo peso attaccato in* B *colla distanza* B E; *adunque permutando il momento della resistenza* A C *al momento del peso in* B *colla distanza* B C *sarà, come il momento della resistenza* L E *a quello del peso in* B *colla distanza* B E; *ma il peso in* B *colla distanza* B C *pareggia il momento della resistenza* A C; *dunque lo stesso colla distanza* E B *pareggerà il momento della resistenza* L E; *il che ec.*

Proposizione LIV. Quesito XVII.

Cercare d' una figura piana, come A B C (Fig. XLVII.) *talmente disposta d' intorno al suo asse* B C, *che i quadrati dell' applicate* A C, D E, *abbiano tra di loro la proporzione composta della superficie* A B C *alla superficie* D B E, *e dell' altezza* B C *all' altezza* B E.

Questa sarà un trilineo parabolico A B C, in cui la base B C sia tangente della cima B, e le A C, D E siano parallele all' asse della parabola; imperocchè, es-

sendo il trilineo A C B un terzo del rettangolo circoscritto A C B, ed il trilineo D E B un terzo parimente del circoscritto rettangolo D E B, averà la superficie A C B alla superficie D E B la ragione composta delle ragioni de' lati C A a D E, (cioè del quadrato C B al quadrato E B) e di C B a B E; onde sarà come il cubo C B al cubo B E. Si aggiunga ora da entrambe le parti la ragione di C B a B E; sarà la ragione composta della superficie A C B alla superficie D E B, e della C B a B E, uguale a quella del biquadrato C B al biquadrato B E; ma stando A C a D E, come il quadrato della C B al quadrato della B E; raddoppiata l'una e l'altra ragione, sarà il quadrato A C al quadrato D E, come il biquadrato C B al biquadrato B E; adunque il quadrato A C al quadrato D E ha la ragione composta di quella della superficie A C B alla superficie D E B, e di quella dell'altezza B C all'altezza B E; che è quello che si dovea ritrovare.

Proposizione LV. Teor. XXXVIII.

La figura dotata delle condizioni sopraddette nell' antecedente proposizione, sarà ugualmente resistente in tutte le sezioni: intesa però cavata fuori di un muro coll' asse B C *orizzontale. E similmen-*

te il prisma, che averà per base detta figura, sarà ugualmente resistente (attesa la propria gravità del medesimo prisma)

La ragione è perchè le resistenze (rispettive) delle linee, o piani A C, D E *sono fra loro, come i quadrati di dette linee, per la prop.* 3 *ed i momenti delle superficie, o solidi* A B C, D B E *hanno la proporzione composta delle dette proporzioni* (cioè delle superficie A B C, D B E, e della distanza B C alla B E, delle quali proporzioni si suppone composta ancora la ragione del quadrato A C al quadrato D E) dunque le resistenze rispettive delle sezioni, cioè i momenti co' quali esse resistono allo strappamento, staranno come i momenti delle figure cavate fuori del muro; e però da per tutto ugualmente resisteranno, in riguardo del proprio peso.

Pruposizione LVI. Quesito XVIII.

Cercare d' un' altra figura solida rotonda d' intorno al suo asse, di cui i cubi de' diametri ne' cerchi applicati A B, C D (Fig. XLVIII.) *abbiano la proporzione composta del solido* A G B *al solido* C G D, *e dell' altezza* E G *all' altezza* F G.

La tromba parabolica, nata dal ravvolgersi il trilineo parabolico G E B d' intorno alla tangente della sua cima G E, soddisfà al Quesito. Imperocchè il solido

A B G al solido C D G (essendo ciascuno d'essi un quinto del cilindro circoscritto) ha ragione composta di quella de' cerchi, e de' quadrati A B, C D, e di quella dell'altezze E G, F G. Si aggiunga un'altra volta di comune la ragione di E G ad F G, sarà dunque la ragione composta di quella de' solidi A B G, C D G, e di quella dell'altezze E G, F G, uguale a quella che si compone dalla agione dei quadrati A B, C D, e dell' altra de' quadrati E G, F G, cioè delle linee A E, C F, o delle duple di esse A B, C D; ma la ragione de' quadrati A B, C D, giunta a quella delle linee A B, C D forma quella de' cubi A B, C D; dunque i cubi de' diametri A B, C D hanno la proporzione composta di quella del solido A G B al solido C G D, e di quella dell'altezza E G, F G. Il che si dovea ec.

Proposizione LVII. Teor. XXXIX.

La figura ritrovata nella precedente proposizione ci dà un solido, che fitto nel muro sarà per tutto ugualmente resistente, considerato come grave.

Perchè la resistenza del cerchio A B *alla resistenza del cerchio* C D *ha proporzione composta del cerchio, o quadrato* A B *al cerchio, o quadrato* C D, *e della linea* A B *alla linea* C D (pel co-

roll. 2 della prop. 2 che parla de' momenti delle resistenze assolute, i quali sono la medesima cosa colle resistenze respettive, delle quali qui si tratta, per la definizione 5) *ma ancora il cubo di* A B *al cubo di* C D *ha proporzione composta delle medesime proporzioni; e però dette resistenze sono, come i cubi de' diametri* A B, C D (*come nella prop.* 4 *si è dimostrato*) *ma i momenti de' solidi hanno altresì la proporzione composta della proporzione de' medesimi solidi, e delle loro altezze*; dunque in questo caso le resistenze sono proporzionali a' momenti del peso de' solidi; e però tanto resiste l' uno, che l' altro, in riguardo del proprio peso. Il che ec.

Proposizione LVIII. Quesito XIX.

Cercare qual sia quel piano, e quel solido, che tirato fuori di una parete, sia in ogni stato ugualmente resistente, o potente a reggere il proprio peso.

Al quesito ho soddisfatto nel mio problema 6 della parte 1 della risposta Apologetica al Sig. A. M. in infinite maniere, dalle quali si deduce il cuneo parabolico, e la tromba altresì parabolica, che si generano dal compimento della parabola ordinaria, o combinandosi col rettangolo, per farne nascere un prisma, o rivolgendosi

attorno la tangente verticale, per avere un solido rotondo, de' quali si è parlato nelle proposizioni 54 55 56 e 57 siccome ancora fu avvertito dal Sig. Leibnizio negli Atti di Lipsia del 1684 e da Monsù Varignonio nelle memorie dell' Accad. Reale di Parigi del 1702 ed in oltre con infinite iperbole, o con lo spazio logaritmico, o con un prisma sopra di esso spazio eretto a qualsivoglia altezza, si ottiene il medesimo intento: come ho dimostrato nel luogo citato, da ripetersi nell' Appendice aggiunta in piè del Trattato presente, Probl. 6 corell. 3 e 4.

Proposizione LIX. Quesito XX.

Cercare qual sia quel solido, cioè di che figura, il quale tenuto in piombo ha in ogni sezione ugual resistenza: cioè che la sezione alla sezione stia, come il solido al solido sopra di esse sezioni costituito.

Tale sarebbe il solido fatto dalla logaritmica A H B (Fig. IL.) girata d'intorno al suo asintoto D O. Imperocchè, o si pigli il solido infinitamente lungo, che averebbe la sezione della sua base nel cerchio descritto dal raggio F B, o quello che l'averebbe nell' altro cerchio del raggio D A, sarebbe per lo teor. 9 di Cristiano Ugenio, da me dimostrato negli Ugeniani cap. 9 n. 16. 9 il primo solido sesquialtero del cono descritto dal triangolo F B O nel girare

intorno ad F O; ed il secondo sarebbe pure sesquialtero del cono similmente descritto dal triangolo D A C, i quali coni, avendo per base i cerchi F B, D A, e per altezza le suttangenti F O, D C, che sono per la natura di questa curva tra di loro uguali, sarebbero in proporzione degli stessi cerchi F B, D A; e però ancora l'uno all' altro de' solidi fatti da essa logaritmica, sarebbe nella ragione delle basi, o sezioni, quali sarebbero i cerchi descritti dai raggi F B D A. Il che ec.

Lo stesso si dica d' un solido, le cui sezioni fossero tanti quadrati, o triangoli, o poligoni, o altre figure simili, fatte sopra l' ordinate della detta logaritmica; o che avesse per sezioni tanti rettangoli uguali, o proporzionali agli stessi quadrati, o alle medesime ordinate, come sarebbe un prisma d' una determinata altezza, fatto sopra la base dello spazio logaritmico suddetto infinitamente lungo; imperocchè secondo ciò che dimostrai negli Ugeniani cap. 3 n. 7 gli spazj logaritmici D A B O, F B O, sono come l' ordinate medesime D A, F B, e però il prisma eretto sul primo spazio a quello che si alzerebbe sul secondo colla medesima altezza averebbe la proporzione delle dette ordinate, ovvero de' rettangoli fatti da esse nella comune altezza del prisma, i quali sarebbero le sezioni dello stesso prisma ne' punti D, F; ed immaginandosi due figure, delle quali una

fosse determinata a capriccio, crescente però in infinito col prolungamento dell' asse, e l'altra avesse per ordinata una quarta proporzionale dopo l'ordinata arbitraria della prima, l'ordinata della logaritmica allo stesso punto, ed un' altra qualsivoglia costante, intendendo fatti gl' infiniti rettangoli dall' ordinate di queste due figure, moltiplicate l'una coll' altra, il solido, che ne risulterebbe, sarebbe dotato della stessa proprietà col suddetto prisma, avendo le sezioni uguali sempre, o proporzionali ai rettangoli di quello; sicchè infiniti solidi possono determinarsi, i quali, nella maniera desiderata in questo quesito, cioè coll' avere le sezioni delle grossezze loro proporzionali a' pesi de' medesimi, fossero d' eguale resistenza in riguardo allo strapparsi direttamente da un piano orizzontale, in cui fitti fussero a squadra, ed a piombo quindi pendessero; i quali tutti però sono di lunghezza infinita, e dipendono sempre nella generazione loro dalla descrizione della logaritmica; nè a me sovviene altra specie di solido, che possa soddisfare al quesito; anzi credo assolutamente impossibile, che verun solido di lunghezza determinata possa avere le suddette condizioni per l'effetto, che si desidera.

Proposizione LX. Quesito XXI.

Cercare ancora quale sia quello spazio superficiale, che considerato in piombo, cioè pendente da alto, sia pure ugualmente resistente: cioè che il taglio al taglio sia come la superficie alla superficie, qual sarebbe A E B (Fig. L.) *se stesse alla porzione sua* C E D, *come* A B *a* C D.

Questo altresì non può essere altro, che il medesimo spazio della logaritmica, le di cui porzioni infinitamente lunghe, tagliate da qualsivoglia ordinata, sono come l'ordinate medesime, dalle quali resta segato, per le cose dimostrate ne' luoghi di sopra citati: e potrebbe anche aggiugnersi la superficie rotonda generata dalla Trattoria BDE rivoltata intorno il suo asse F E in cui parimente le superficie infinitamente lunghe A B E, C D E tagliate con varj piani paralleli alla base, sono come le circonferenze A B, C D nelle quali si fa il taglio medesimo; come può ricavarsi da ciò, che dimostrai negli Ugeniani capit. 12 num. 15 e nella Pistola geometrica al chiarissimo P. Ceva n. 19.

Proposizione LXI. Quesito XL.

La figura piana d' intorno al proprio asse, le superficie della quale tagliate dall' applicate, siano tra loro, come le medesime applicate non è figura di proporzionale aumento, o estensione.

Figura di poporzionale aumento d' intorno al proprio asse intendo quella, della quale qualunque parte terminata da qualunque applicata al suo parallelogrammo circoscritto ha la medesima proporzione, che qualunque altra parte terminata da un'altra applicata al suo parallelogrammo circoscritto; come segue nell' infinite parabole, che nella prima; cioè nel triangolo A B C (Fig. LI.) *il triangolo* B A C, *al parallelogrammo* B D *sta come il triangolo* E A F *al suo parallelogrammo* E G, *perchè è sudduplo ec.*

E nella seconda parabola (cioè quella d' Apollonio) il bilineo B A C *al suo parallelogrammo* B D *sta, come il bilineo* E A F *al suo parallelogrammo* E G, *perchè è sesquialtero ec. e così nell' altre.*

Se dunqne nella figura A B C (Fig. LII.) *d' intorno l' asse* B O, *fusse come la superficie* A B C *alla* D B E, *così la linea applicata* A C *alla* D E, *e così sempre; dico che questa figura non è di proporzionale aumento; perchè essendo tale, sa-*

rebbe come il parallelogrammo A B *al trilineo* A B O, *così il parallelogrammo* B D *al trilineo* D B H; *e permutando, il parallelogrammo* A B *al parallelogrammo* B D, *come il trilineo* A B O *al trilineo* D B H, *cioè* (*per la supposta proprietà della figura*) *come l' applicata* A O *alla* D H, *cioè alla* I O; *o pure come il parallelogrammo* A B *al parallelogrammo* I B; *adunque i parallelogrammi* D B, I B *sarebbero uguali tra loro, il tutto alla parte; il che è assurdo; adunque ec.*

È da notarsi, che sebbene il Sig. Viviani non giunse a terminare la natura di cotesto spazio; il che non è maraviglia, essendo che la curva logaritmica allora non era assai nota fra' Matematici, e molto meno divulgate erano le sue proprietà mirabili pubblicate da Cristiano Ugenio, e poscia da noi dimostrate: sebbene, assai prima dello stesso Ugenio, era stata ritrovata la dimensione dello spazio logaritmico, e dei solidi da esso generati, dall' incomparabile Evangelista Torricelli; come apparisce dall' indice dell' opere inedite di lui, rimase fino a questi ultimi tempi chiuse in una cassa serrata a chiavi tenute appresso di più possessori, della notizia delle quali ne abbiamo l' obbligo all' Autore della Prefazione stampata poco fa, e premessa alle Accademiche lezioni di esso Torricelli; e speriamo un giorno di doverlo altresì ringraziare per l' edizione di tutti que' preziosi

monumenti, che con grandissimo vantaggio delle scienze, e somma gloria della nostra Italia, ci ha lasciati quel grand' ingegno. Per altro è assai, che almeno il nostro Autore indovinasse, e dimostrasse, non poter essere lo spazio, di cui si trattava, proporzionale al parallelogrammo circoscritto: siccome poco credo che vi mancasse all' accorgersi, che nè meno essere poteva alcuno spazio di finita, e terminata lunghezza.

Oltre di ciò, in proposito delle figure di proporzionale augumento, si vede, che il Sig. Viviani fin d' allora per se stesso avvertì alla proporzione dell' infinite parabole co' parallelogrammi circoscritti, o a triangoli iscritti de' quali fa menzione in questa stessa pagina colla nota seguente, in cui si vede una bellissima preprietà di questa progressione di spazj, scoperta avanti ad ogni altro dal nostro Autore.

Termini di proporzioni tra i parallelogrammi circoscritti all' infinite parabole, colle loro parabole.

Parabole: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ec.

Parallelogrammi: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ec.

Termini di proporzione dell' infinite parabole con i loro inscritti triangoli, e regola per ritrovarli con facilità, scrivendo prima un sì, ed un no, come si vede,

i numeri dispari dall' unità, ed a dirimpetto (ovvero direttamente al di sotto) i numeri della progressione naturale dall' unità: riempiendo poi i mezzi colla somma del termine di sopra (cioè dell' antecedente) con quel di sotto (vale a dire col conseguente) come si vede qui appresso.

Parabole	1	4	3	8	5	12	7	16	9	ec.
Triangoli	1	3	2	5	3	7	4	9	5	ec.

Anzi trovo, essere stata dalla stesso nostro Autore determinata la ragione, che osservano le porzioni, non solo dell' infinite parabole, ma ancora de' coni, e conoidi da esse generate, come si vede nella seguente sua proposizione.

Proposizione LXII. Teor. LXI.

Nella parabola lineare A B C (Fig. LIII.), *la superficie* A B C *alla superficie* D B E *sta come il quadrato* A C *al quadrato* D E.

Nel cono A B C (*girando la parabola lineare intorno all' asse* B C) *il co-*

no A B C *al cono* D B E *sta come il cubo* A C *al cubo* D E.

Nella parabola quadratica A B C, *la superficie* A B C *alla* D B E *sta, come il cubo* A C *al cubo* D E.

Nel conoide quadratico A B C *il solido* A B C *al solido* D B E *sta, come il biquadrato* A C *al biquadrato* D E.

Nella parabola cubica la superficie A B C *alla* D B E *sta come il biquadrato* A C *al biquadrato* D E.

Nel conoide cubico, il solido A B C *al solido* D B E *sta, come il surdesolido* A C *al surdesolido* D E (*intendendosi appresso gli Algebristi antichi per* surdesolidi *le quinte potestà di esse linee*)

Nella parabola quadrato-quadratica, la superficie A B C *alla* D B E *sta, come il surdesolido* A C *al surdesolido* D E.

Nel conoide biquadratico, il solido A B C *al solido* D B E *sta, come il cubo quadrato (cioè la stessa potestà) di* A C *al cubo quadrato (cioè parimente alla stessa potestà) di* D E *ec.*

E così gradatamente salendo, secondo la progressione delle medesime potestà algebratiche; ovvero per dirla più generalmente, se le parti dell' asse tagliate dalla cima, cioè C B, E B, sono proporzionali alle potestà dell' ordinate A C, D E, il di cui esponente, dal quale si denominano, sia qualunque numero *m*, la superficie A B C alla superficie D B E starà,

come la potestà dell'ordinata A C, il di cui esponente sia maggiore d'una unità, cioè $m + 1$ ad una simile potestà dell'ordinata D E. Ma il solido A B C al solido D B E starà, come la potestà dell'ordinata A C, il di cui esponente sia maggiore di m per due unità, cioè $m + 2$, ad una simile potestà dell'ordinata D E; il che può vedersi dimostrato appresso l'Angeli, il Vallisio, ed altri tali Autori.

Proposizione LXIII. Quesito XXII.

Cercare un solido rotondo d'intorno al proprio asse, come F L G (Fig. LIV.), *di cui i piani applicati* F G, H I, *stiano tra loro, come i solidi* F L G, H L I; *che questo ancora appeso perpendicolarmente sarà per tutto di uguale resistenza.*

Già si è veduto nella prop. 59. essere questo un solido generato dallo stesso spazio logaritmico, ovvero che abbia le sezioni proporzionali alle ordinate della logaritmica, o a' quadrati di esse; nè occorre qui aggiungere altro, se non che di esso pure si verifica, non esser cotal solido figura di proporzionale augumento, cioè non avere sempre qualunque sua porzione una medesima relazione al cilindro, o prisma circoscritto; potendosi qui applicare la stessa dimostrazione addotta dal Viviani

nella proposizione precedente; il che con espresso avviso fu accennato dal medesimo Autore nel luogo di sopra addotto; ove dopo le parole: *il che è assurdo, adunque ec.* così immediatamente soggiunge.

L'istesso si concluderà de' solidi rotondi, de' quali segati con piani paralleli alla base, stia come la base alla base, così il solido al solido.

Proposizione LXIV. Teor. LXII.

Se del cono solido, o piramide A B C G (Fig. LV.), *sospesa perpendicolare all' orizzonte, il peso della parte* A C G B *sarà bastante appunto a superare la resistenza della sezione* B C; *e che la misura della resistenza* B C *si figuri essere la linea* A G, *e la misura del peso* A C G B *sia la medesima* A G; *accorciando il cono, o piramide fino alla sezione* E F, *dico, che il solo peso della piramide* D G *non è bastante a superare la resistenza* E F, *e che per superarla si richiede un peso* H, *il quale al peso della piramide* D G *abbia la proporzione della* A D *differenza dell' altezze, alla* D G, *altezza della minore.*

Poichè prese dopo la A G, G D, G I, G L *continue proporzionali, essendo*

la quarta G L *misura del peso* E F G (*perchè le piramidi simili hanno triplicata proporzione de' lati omologhi*) *ed essendo la medesima prima* A G *misura della resistenza* B C, *sarà la terza* G I *misura della resistenza* E F (*perchè le resistenze assolute* B C, E F, *sono tra loro, come le sezioni* B C, E F, *che per essere simili, hanno doppia proporzione de' lati omologhi* A B, D E, *cioè delle* A G, D G.) *se dunque una resistenza* B C, *rappresentata dalla linea* A G, *per essere superata vuole un peso, quanto rappresenta la medesima linea* A G; *la resistenza* E F *rappresentata dalla* G I, *vorrà un peso, quanto la medesima* G I: *ma il peso della piramide* E F G *è quanto la linea* G L; *adunque il peso che manca per istrappare la piramide* F E G, *cioè il peso* H, *dovrà essere quanto la linea* L I; *e però il peso* H *al peso della sua piramide* E F G *starà, come* I L *ad* L G, *cioè come* A D *differenza dell' altezze, a* D G *altezza della piramide, o cono più corto. Il che ec.*

Da questa utilissima proposizione, e dall' ingegnosa maniera, con cui l' Autore l' ha dimostrata, moltissime altre importanti verità si possono dedurre, le quali io brevemente accennerò ne' seguenti Corollarj, per non accrescere il numero delle proposizioni.

Corollario I. Giacchè il peso H al peso della piramide F D E G sta, come I L ad L G; ed il peso di detta piramide al peso dell' intera C B G sta come L G ad A G; sarà per l' ugual proporzione il peso H al peso dell' intera piramide C A B G come I L ad A G.

Corollario II. O pure, essendo il peso H al peso F D E G, come A D a D G, cioè, preso per base comune il quadrato D G, come il prisma dell'altezza A D eretto sopra il quadrato D G, al cubo D G; ed il peso F D E G al peso C A B G essendo, come il cubo D G al cubo A G, sarà per l' ugualità ordinata il peso H al peso C A B G, come il prisma, che abbia per altezza A D, e per base il quadrato D G, al cubo A G.

Corollario III. Quindi può agevolmente determinarsi, quale sia quella porzione di cono, o piramide, che oltre al proprio peso, è capace di reggere il maggior peso H aggiuntovi; imperocchè il maggior prisma, che far si possa dalle parti d' una data linea, delle quali una serva per altezza, e la rimanente sia il lato del quadrato della sua base, è quando l'altezza sia un terzo, ed il lato quadro della base comprenda gli altri due terzi della data linea, conforme è già noto a' Geometri, e fu dimostrato dal Borelli nel sedicesimo assunto d' Archimede; dunque allora il pe-

so H sarà il maggior di tutti, quando la sezione F D E si farà in lontananza dalla base C A B per un terzo di tutta l' altezza di quella piramide C B G, che sarebbe sufficiente col proprio peso a vincere la resistenza della sua base; e conseguentemente la piramide F D E G così tagliata, riuscirà della maggior resistenza che sia possibile.

Corollario IV. Per lo contrario, sapendosi per ipotesi, o per esperienza che una piramide abbia la maggiore sua resistenza nella sezione F D E, cioè che sostenuta in essa sia capace di reggere, oltre la propria gravezza, il maggior peso possibile: si saprà ancora, che accrescendola fino al piano C A B, distante da detta sezione per la metà dell' altezza G D, la piramide C A B G dovrà rompersi col proprio peso.

Corollario V. Quando il cono, o piramide fosse fitto colla base nel muro, sporgendo fuori di esso coll' asse orizzontalmente disteso, e fusse come prima C A B G il solido, che in tale stato si rompesse col proprio peso: se poi si supponesse sporgersi fuori del muro la sola parte F G E, sarebbe questa parimente capace di reggere oltre la propria gravità un tale peso H, che liberamente pendendo dal termine G stesse al peso di tutta la piramide C A B G come un quarto del prisma contenuto dall' altezza D A, e dal quadrato D G,

al cubo della G A: come è facile il dedurlo dalle cose dette di sopra.

Corollario VI. Onde ciò che si è detto nel corollario 3. e 4. del massimo peso, che regger possa una piramide pendente da alto, come fitta a piombo in una volta, vale ancora nel sito, che fosse impegnata in un muro coll' asse orizzontale.

Corollario VII. Si potrebbe ancora collo stesso metodo determinare la maggior resistenza di qualsivoglia altra specie di solido, e principalmente di quelli, che nascono dall' infinite parabole, o iperbole; e già ne ho in pronto alcune regole generali: ma non avendo tempo di stenderle, e di confermarle colle dovute dimostrazioni, lascierò all' industria de' Lettori il piacere di ritrovarle.

Proposizione LXV. Teor. XLIII.

Ne' cilindri, o prismi, coni, o piramidi, le basi loro essendo uguali, e l' altezze disuguali, le forze abili a sostenerli eretti sopra di un punto del contorno della loro base, come sopra un sostegno, saranno tra di loro eguali.

Sia il cilindro retto A B (Fig. LVI.), *la cui base* D B, *e l' altezza* A B; *e sia un altro cilindro, la di cui altezza* C B *sopra la stessa base* D B. *Dico, che le*

potenze E, F *dalle quali applicate a' punti* A, C, *si mantengono i detti cilindri eretti, e perpendicolari all' orizzonte, sopra il sostegno* B, *d' intorno a cui senza il ritegno di dette potenze, si potrebbero rivoltare, sono tra di loro uguali.*

Imperocchè la potenza E, *che col vette* B A *sostiene il peso* A B D, *sta al detto peso, come* D B *semidiametro della base (gravitando il cilindro sopra il centro d'essa base, cioè sopra il punto* D) *alla* B A; *ed il peso* A B D *sta al peso* C B D, *come* B A *a* B C, *ed il peso* C B D *sta alla forza* F, *che lo sostiene applicata in* C, *come* B C *a* B D; *dunque, per l' ugual proporzione, la forza* E *alla forza* F *sta, come* B D *alla stessa* B D, *cioè in ragione di ugualità; il che ec.*

Corollario I. Per altissima che sia la colonna D B A, e conseguentemente essendo quantosivoglia pesantissima, si potrà da una piccola forza applicata all' estremo A sostenere ritta sopra un appoggio B, egualmente, che possa la medesima forza reggere qualunque piccolo pezzo D B C della stessa colonna, applicandosi a sostenerla in C. E così uno Scaffale, una Spera, un Armadio, e cose simili, che sogliono col piede posare sopra una tavola, o sul pavimento, o sopra le sue mensole, o altri ritegni, e di sopra fermarsi con arpioni, e spranghe attaccate al muro, non richiede maggior forza, per essere più al-

to, di quella che richiederebbe, se in pari base fosse più basso, ed uniformemente gravato venisse in tutte le sue parti.

Corollario II. Un uscio, o imposta di finestre, la quale si regge sopra due cardini: purchè abbia il cardine inferiore proporzionato a sostenere il peso totale di essa, potrà avere il cardine superiore di non maggior forza di quella, che si richiederebbe a sostenerne una assai più bassa; e spesso nella pratica alle porte principali de' palazzi, o delle città s'impiega in ciò soverchia mole di ferro, o multiplicando senza necessità gli arpioni, o facendoli troppo più del dovere massicci.

Corollario III. Similmente ne' coni A B D, C *b d* (Fig LVII.) che abbiano l'ugnali basi D B, *d b* appoggiate a' sostegni B. *b*, e di altezza quantunque disuguale D A. *d* C, le forze E, F applicate per sostenerli alle loro cime, saranno uguali, per lo stesso raziocinio addotto in questa proposizione dal Sig Viviani; e lo stesso vale d'altri solidi del medesimo nome, purchè sieno di tale specie di figura, che in ugual base siano proporzionali alle loro altezze: nulla importando, che qui i lati B A, *b* C non sieno le vere altezze de' solidi, ma bensì gli assi D A, *d* C, perchè essendo appunto i lati B A, *b* C obliqui alla direzione delle potenze E, F, i momenti di esse debbono corrispondere alle D A, *d* C, che sono i seni dell'inclina-

zione delle braccia B A, *b* C colle direzioni delle potenze; onde corre a cappello la dimostrazione del Sig. Viviani, anche quando si trattasse di conoidi, o sferoidi, il profilo de' quali sarebbe curvo.

Proposizione LXVI. Teor. XLIV.

Le potenze G, H (Fig. LVIII.), *che sostengono eretti i' prismi simili* A B C, D B E, *intorno i punti* C, E, *sono fra loro, come i pesi assoluti de' medesimi prismi.*

Ciò vale ancora ne' coni, piramidi, ed altri corpi simili: perchè averanno i loro centri di gravità similmente collocati nei loro assi, e però corrispondenti alle basi loro in una lontananza simile da' sostegni C, E, cioè proporzionale alle leve C B, B E, onde il momento del solido A B C uguagliando quello del peso G, ed il momento del solido D B E pareggiando quello del peso H, sarà il primo momento al terzo, come il secondo al quarto; sicchè la ragione composta della ragione de' pesi de' solidi A B C, D B E, e di quella delle distanze de' centri loro di gravità da' sostegni C, E, sarà uguale alla ragione composta di questa de' pesi G, H, e delle distanze C B, E B; tolte adunque dall'una, e dall'altra parte le ragioni uguali delle di-

stanze de' centri di gravità, e delle distanze C B, E B, in cui operano i pesi G, H, rimarrà la ragione de' pesi de' solidi A B C, D B E uguale a quella de' pesi, ovvero potenze G, H. Il che si dovea dimostrare.

Proposizione LXVII. Quesito XXIII.

Sia A B (Fig. LIX.) *minima lunghezza*, *ed* A C *diametro della base d'un cilindro, che fitto a squadra in un muro, si spezzi dal proprio peso: e sia un' altra lunghezza data* O *di un altro cilindro; Cercasi, quanto dovrà essere il diametro della sua base, acciocchè tal cilindro sia prossimo a spezzarsi dal proprio peso?*

Prendasi qualunque punto D, *e si giungano le* D C, D A, D B, *e prolunghinsi in infinito: e nel triangolo* A D B *adattisi la* F G *parallela alla* A B, *ed eguale alla data lunghezza* O, *e prolunghisi in* H, *e per i punti* D, C *passi una parabola, la di cui cima sia* D, *e tangente* D A, *e seghi la* G H *in* E. *Dico* E F *essere il diametro della base, che si cerca.*

Imperocchè il momento della resistenza del cerchio, il cui diametro C A, nel cilindro, che ha la lunghezza A B, al momento della resistenza del cerchio, che ha

per diametro E F, nel cilindro della lunghezza F G, per la prop. 4 è sempre in triplicata ragione di C A ad E F. Ma il momento del peso del primo al momento del peso del secondo cilindro, per la prop. 23. è in duplicata ragione de' rettangoli per l'asse C A B, E F G: ovvero C A D, E F D; cioè in duplicata ragione delle C A, ed E F, e nella duplicata delle A D, D F; la quale per cagione della parabola è la medesima colla semplice di C A ad E F, che aggiunta alla duplicata delle medesime compone la ragione altresì triplicata di C A ad E F, adunque il momento della resistenza C A al momento della resistenza E F sta come il momento del peso del cilindro C A B a quello dell'altro cilindro E F G; e però se il primo uguaglia il terzo, ancora il secondo uguaglierà il quarto. Il che ec.

Corollario I. Quindi si può dedurre, che ancora i cilindri fatti da' rettangoli D F E, D A C, circonscritti al trilineo parabolico D E F, e girati d'intorno alla retta D A, che tocca la parabola nella sua cima D, sarebbero di ugual resistenza, posto che fussero fitti colla base in un muro.

Corollario II. Anzi la stessa tromba parabolica, nata dalla rivoluzione del trilineo E C D F attorno la detta tangente D F, sarebbe d'ugual resistenza, come nella prop. 56. si è avvertito, perchè le

sue parti essendo properzionali a' cilindri circoscritti, e col centro di gravità altresì proporzionalmente distante dalla sua base, si manterrebbe la medesima proporzionalità de' momenti de' pesi di esse, co' momenti delle resistenze nelle loro basi, appunto come avviene, pel corollario precedente, ne' cilindri circoscritti.

Proposizione LXVIII. Quesito XXIV.

Sia A B (Fig. LX.) *diametro*, *e* B C *lunghezza minima d' un cilindro*, *che fitto in un muro a squadra pel proprio peso si spezzi*; *e sia nel triangolo* A B D *applicata la* E F *parallela ad* A B, *che sia il diametro della base*, *o grossezza d' un altro cilindro dell' istessa materia. Cercasi*, *quale dovrà essere la sua lunghezza*, *acciocchè si riduca indifferente*, *e prossimo allo spezzarsi pure dal suo proprio peso.*

Colla cima D, *ed intorno al diametro* D B F, *descrivasi la parabola* D C G, *che passi pel punto* C; *imperocchè prolungata* E F *in* G, *sarà la* F G *contenuta nella semiparabola la cercata lunghezza. Congiungasi* D C, *e si prolunghi*, *siccome ancora la* F G *in* H. B C *ad* F G *sta*, *come* F G *ad* F H, *per lo lemma* 24. *de motu aequabili del Torricelli.*

Stimo di più facile, e di più breve riuscita, il dimostrare altrimenti questa proposizione, che l'indovinare, come proseguisce la sua dimostrazione il Sig Viviani; che però diremo in questa maniera. Il momento della resistenza nella sezione A B del cilindro A B C, al momento della resistenza nella sezione E F del cilindro E F G, sta per la prop. 4. come il cubo A B al cubo E F; ma il momento del peso del primo al momento del peso del secondo cilindro essendo in ragione composta della duplicata di A B ad E F, e della duplicata di B C ad F G (per la prop. 23.) che per la natura della parabola è la medesima colla semplice di B D a D F, cioè di A B ad E F, la quale aggiunta alla duplicata di esse linee, forma la triplicata delle medesime, è altresì come il cubo A B al cubo E F; dunque i momenti delle resistenze delle basi sono proporzionali a' momenti de' pesi de' cilindri; onde se il momento del peso del primo cilindro uguaglia quello della sua resistenza, ancora il momento del peso del secondo cilindro uguaglierà il momento della resistenza sua. Il che ec.

Corollario. Lo stesso, che si è detto de' cilindri, vale de' coni, conoidi paraboliche, emisferoidi, ed altri solidi, il cui centro di gravità divida l' asse proporzionalmente.

Proposizione LXIX. Teor. XLV.

Se sarà, come il quadrato della prima A (Fig. LXI.) *al quadrato della seconda* B, *così la terza* C *alla quarta* D; *così la quinta* E *alla sesta* F; *il biquadrato della prima* A *al biquadrato della seconda* B *sta, come la quinta* E *alla sesta* F.

Si faccia, come la C *alla* D, *così* A *alla* G; *sarà dunque il quadrato* A *al quadrato* B, *come la* A *alla* G; *e però le* A, B, G *sono tre continue proporzionali. Si trovino le altre due continue* H, I, *e perchè il biquadrato di* A *al biquadrato di* B *sta come la prima* A *alla quinta* I; *e la prima* A *alla quinta* I *sta, come il quadrato della prima* A *al quadrato della terza* G (*che è media fra le* A, *ed* I) *cioè come il quadrato della* C *al quadrato della* D, (*essendosi fatto il lato* A *al lato* G, *come il lato* C *al lato* D) *cioè come la* E *alla* F, *per supposizione: adunque il biquadrato di* A *al biquadrato di* B *sta, come la linea* E *alla linea* F; *il che ec.*

Ovvero propongasi così in questi termini.

Proposizione LXX. Teor. XLVI.

Se il quadrato della prima al quadrato della seconda starà come la prima alla terza: e come il quadrato della prima al quadrato della terza, così la quarta alla quinta; sarà il biquadrato della prima al biquadrato della seconda, come la quarta alla quinta.

Poichè essendo il quadrato della prima al quadrato della seconda, come la prima alla terza, saranno la prima, la seconda, e la terza continue proporzionali. Si prendano l'altre due continue A, B (Fig LXII) *nella medesima proporzione. Sarà il biquadrato della prima al biquadrato della seconda, come la prima alla* B; *cioè come il quadrato della terza (perchè la prima, e la terza, e la* B *sono continue proporzionali) cioè come la quarta alla quinta, per supposizione. Adunque ec.*

Proposizione LXXI. Teor. XLVII.

Se nella parabola C A S (Fig. LXIII.) *il di cui asse è* C X, *sarà* C B *la tangente della cima, e la* B A V *parallela all'asse; e delle applicate* I N, N M *sia media proporzionale* N L; *siccome delle*

O R, R Q *sia media* R P; *e similmente delle* S X, X V *sia media* X T, *e così sempre: i punti* L, P, A, T *saranno in una parabola biquadratica.*

Si applichi A Z *al punto* A, *la quale nel parallelogrammo* A C *sarà uguale alla retta* O R; *dunque, come* A Z *a* P R, *così* P R *ad* R Q; *e perciò sarà il quadrato della prima* A Z *al quadrato della seconda* P R, *come la terza linea* A Z *alla quarta* R Q; *ma il quadrato della terza* A Z *al quadrato della quarta* Q R, *sta come la quinta linea* C Z *alla sesta* R C; *dunque per la prop* 69 *starà il biquadrato della prima* A Z, *al biquadrato della seconda* P R, *come la quinta* C Z *alla sesta* R C; *e ciò sempre, dovunque sia condotta la* O R; *adunque la linea* C P A *è la parabola biquadratica; il che ec.*

Si potea forse più speditamente dimostrare l'intento così. C Z a C R ha doppia proporzione di A Z a Q R; ma A Z a Q R di nuovo ha proporzione doppia di quella, che ha A Z a P R; dunque C Z a C R ha proporzione quadrupla di A Z a P R; e per tanto Z C ad R C sta come la quarta potestà, cioè il biquadrato di A Z alla quarta potestà, cioè al biquadrato di P R; onde C P A, è parabola biquadratica; il che ec.

Proposizione LXXII. Teor. XLVIII

I momenti de' coni, e piramidi simili A B C, D E C (Fig. LXIV.) *fuor del muro, resultanti da' pesi d' essi coni, e dalle leve* B C, E C, *sono fra loro, come i biquadrati delle lunghezze* B C, E C.

Trovate le C F, C G, C H *continue proporzionali, dopo le* B C, E C: *il momento del cono* A B C *al momento del cono* D E C *averà la proporzione composta di quella del peso assoluto* A B C *al peso assoluto* D E C (*cioè del cono* A B C *al cono* D E C, *che è quanto dire del cubo* B C *al cubo* C E, *ovvero della prima* B C *alla quarta* C G) *e della leva* B C *alla leva* C E, *cioè della* C G *alla* C H. *Ma ancora la* B C *alla* C H *ha proporzione composta delle medesime* B C, C G, *e* C G, C H; *dunque il momento* A B C *al momento* D E C *sta, come la prima* B C *alla quinta* C H, *cioè come il biquadrato* B C *al biquadrato* C E; *il che si dovea dimostrare.*

Corollario. La scala de' momenti di questi coni, o piramidi sta nelle linee E M, B N *terminati alla parabola* C M N *biquadratica, della quale sia la cima* C.

Chiamasi dal nostro Autore in questo luogo, ed in molti altri appresso *Scala* di momenti, di pesi, o di resistenze, una fi-

gura piana, che colle sue ordinate tra di loro parallele, e tirate perpendicolarmente ad una retta in ogni suo punto, dimostri colle dette ordinate la proporzione de' momenti, o de' pesi, o delle resistenze, che in detti punti si trovano; come nel nostro proposito, essendo B N ad E M, come il biquadrato B C al biquadrato C E, cioè come il momento del cono A B C, al momento del cono D E C, dovunque sia tirata la M E parallela a B N, dicesi la figura B C M N (che è una parabola biquadratica) la scala de' momenti di questi coni.

Proposizione LXXIII. Teor. IL.

De' coni, o piramidi simili fitti nel muro orizzontalmente uno solo è quello, che gravato dal proprio peso appunto si spezza: ed ogni più corto riceve aggiunta di peso oltre al proprio; ogni più lungo è troppo grave.

Il momento della resistenza A B *al momento della resistenza* D E *sta, come il cubo* A B *al cubo* D E *per la prop.* 4 *cioè come il cubo* B C *al cubo* E C, *o pure come la prima* B C *alla quarta* C G; *ma si è provato nell'antecedente, che il momento del peso* A B C *al momento del peso* D E C *sta, come la prima* B C *alla quinta* C H; *adunque*

se il momento A B C *pareggia la resistenza* A B, *il momento* D E G *non pareggia la resistenza* D E, *ma sarà tanto minore, quanto la* C H, *misura di detto momento, è minore della* C G, *misura della resistenza: o pure, quanto il cono, o piramide* D C E *è più corto dell'* A B C.

Proposizione LXXIV. Teor. L.

I momenti de' cunei B D I, E G I *fuori del muro, risultanti da' pesi assoluti di essi, e dalle leve* D I, G I, *sono fra loro come i cubi delle lunghezze fuori del muro*, D I, G I.

Prendansi le I L, I M *continue proporzionali dopo le* D I, G I. *E perchè il momento del cuneo* B D I *al momento del cuneo* E G I *ha proporzione composta del peso assoluto* B D I *al peso assoluto* E G I (*cioè della base* C D I *alla base* H G I, *o pure del quadrato* D I *al quadrato* G I, *che è quanto dire della linea* D I *alla* L I) *e della leva* D I *alla* G I *cioè della* L I *alla* I M; *e la* D I *alla* I M *ha pure la proporzione composta delle medesime* D I *ad* L I, *ed* L I *ad* I M; *adunque il momento del cuneo* B D I *al momento del cuneo* E G I *sta, come la* D I *alla* I M, *cioè come il cubo* D I *al cubo* I G; *i quali sono i cubi delle lunghezze loro; il che ec.*

Corollario. *La scala de' momenti di questi cunei sta nelle linee* G P, D Q, *terminate alla parabola cubica* I P Q, *la cui cima è in* I.

Proposizione LXXV. Teor. LI.

Un solo di questi cunei è quello, in cui il momento del proprio peso pareggi quello della sua resistenza: e degli altri i più corti ricercano altro peso, ed i più lunghi sono troppo gravi.

Imperocchè il momento della resistenza B D (Fig. LXV.) *al momento della resistenza* E G *per la prop. 3 sta, come il quadrato* C D *al quadrato* H G, *cioè come il quadrato* D I *al quadrato* G I, *che sono i quadrati delle lunghezze, o pure come la linea* D I *alla* L I; *ma si è provato nella precedente, che il momento del peso* B D I *al momento del peso* E G I, *è come la linea* D I *alla* L M; *dunque se la* D I *sarà misura della resistenza di* B D, *ed anche misura del momento di* B D I, *la* L I *sarà misura della resistenza* E G, *e la minore* M I *sarà misura del momento del peso* E G I; *sicchè per pareggiare la resistenza* E G *gli manca tanto momento, quanto la* L M; *e però non solo ec. Il che si dovea dimostrare.*

Corollario I. Se il cuneo D B il massimo, che possa reggersi col suo peso contro la resistenza della sua base, ogni altro più corto, come E G I potrà oltre il proprio peso reggerne un altro K, il quale stia al peso di tutto il cuneo B D I, come un terzo del rettangolo D G I sta al quadrato D I. Imperocchè si è veduto nella proposizione, che il momento, il quale manca al momento del cuneo E G I per pareggiare la resistenza della sua base E G, sta al momento del cuneo E G I, come L M ad M I; ovvero (per la proporzionalità delle linee) come D G a G I, cioè come il rettangolo D G I al quadrato G I; sia il momento suddetto, che manca per pareggiare la resistenza E G quello, che averebbe il peso K pendente in I, il quale sarebbe uguale al momento del triplo di K posto nel centro di gravità del cuneo E G I che dista dalla base, cioè dal sostegno F G per un terzo di G I (ciò che è noto accadere nel triangolo della faccia del cuneo H G I) essendo così le distanze reciproche de' pesi; e però il momento del triplo di K posto nel centro di gravità del cuneo E G I al momento del peso di esso cuneo (il quale s' intende altresì applicato nel medesimo centro) o pure il triplo di K al peso del cuneo stesso, sta come il rettangolo D G I al quadrato I G; ma il peso del cuneo E G I, al peso del cuneo B D I sta, come il triangolo H G I al

triangolo C D I, cioè come il quadrato G I al quadrato D I; dunque per l' ugualità sarà il triplo di K al peso del cuneo B D I, come il rettangolo D G I al quadrato D I: e conseguentemente il solo peso K (da appendersi in I per uguagliare col peso del cuneo E G I la resistenza della sua base) sta al peso del cuneo B D I (il quale col proprio peso uguagli la resistenza della sua base) come un terzo del rettangolo D G I al quadrato D I.

Corollario II. Onde i pesi, che potranno aggiugnersi all'estremo di questi cunei minori del massimo B D I, sono tra loro, come i rettangoli D G I fatti da' segmenti della lunghezza D I.

Corollario III. E conseguentemente tra' cunei minori quello è capace di reggere maggior peso di tutti, che è di lunghezza suddupla del massimo; perchè di tutti i rettangoli D G I fatti dalle parti della linea D I, il maggiore è quando il punto G cade nel mezzo appunto della D I.

Corollario IV. E perchè cadendo il punto G nel mezzo di D I, il rettangolo D G I (che è il quadrato della metà di D I) è un quarto del quadrato D I, un terzo del rettangolo D G I sarà allora un dodicesimo del quadrato D I; onde veniamo in cognizione, che il maggior peso, che reggere si possa da questi cunei attaccato al loro termine è la dodicesima parte

del peso, che aver potrebbe il cuneo; se fusse tanto lungo, che col suo peso equilibrasse la resistenza della sua base.

Proposizione LXXVI. Teor. LII.

I momenti del conoide parabolico fitto nel muro, ed allungato, ora in A B C (Fig. LXVI.) *ed ora in* D E C, *resultanti da' proprj pesi, e dalle lunghezze* F C, O C, *sono tra loro come i cubi delle medesime lunghezze.*

Poichè il momento di B A C *al momento di* E D C *ha proporzione composta del peso assoluto* A B C *al peso assoluto* E D C, *cioè del conoide al conoide, o pure del quadrato dell' altezza* F C *al quadrato dell' altezza* C O, *cioè (prese le* C G, C H *continue proporzionali dopo le* F C, C O) *della linea* F C *alla terza* C G: *e della leva* F C *alla leva* O C, *cioè della* C G *alla* C H; *ma anche la* F C *alla* C H *ha proporzione composta delle medesime linee* F C, C G, *e* C G, C H; *dunque come* F C *a* C H, *cioè come il cubo* F C *al cubo* C O, *così il momento del conoide* A B C *al momento del conoide* D E C; *il che si dovea dimostrare.*

Corollario. *La scala del momento di questi conoidi è parimente la parabola cubica* C P Q.

Assume l' Autore in questa dimostrazione, come cosa nota, che il conoide A B C al conoide D C E stia, come il quadrato F C al quadrato C O. Il che è chiaro, per essere i cerchi A B, D E proporzionali a' quadrati de' raggi A F, D O, cioè (per la natura della parabola) all' altezze F C, C O, o pure all' ordinate in un triangolo fatto su la base A F coll' altezza F C; e però il conoide, ed il detto triangolo sono grandezze proporzionalmente analoghe. Sicchè essendo i triangoli tagliati con linee parallele alla base, proporzionali a' quadrati dell' altezze, ancora ne' conoidi parabolici, segati co' piani paralleli alla base, dee seguire il medesimo.

Proposizione LXXVII. Teor. LIII.

Uno solo è il conoide parabolico, che pareggi col suo peso la propria resistenza.

Il momento della resistenza di A B *al momento della resistenza* D E *sta come il cubo* A B *al cubo di* D E, *per la prop. 4.*

Cioè presa C I media proporzionale fra le altezze F C, O C (le quali essendo proporzionali a' quadrati A B, D E, ed ancora a' quadrati F C, C I, danno A B a D E, come F C a C I) sarà il momento della resistenza A B al momento della resistenza D E, come il cubo F C al cubo

C I; ma il momento del peso A B C al momento del peso D E C sta, come il cubo F C al cubo C O, per l' antecedente; dunque se il momento della resistenza A B viene uguagliato dal momento del peso A B C, il momento poi della resistenza D E non potrà pareggiarsi dal momento del peso D E C; ma rimarrà quello tanto superiore a questo, quanto il cubo I C supera il cubo O C, ovvero quanto il cubo A B supera il cubo D E; onde unico sarà quel conoide, il quale col proprio peso uguagli la sua resistenza.

Corollario. Quando il conoide A B C fusse precisamente abile col suo peso ad uguagliare il momento della resistenza A B, se la porzione della lunghezza O C sarà tale, che il cubo della intera F C sia quadruplo del cubo della O C, potrà il conoide D E C oltre il suo peso sostenere il massimo, che sia possibile: essendo allora maggiore la differenza de' cubi I C, O C, che sia mai in altro caso possibile.

Proposizione LXXVIII. Quesito XXV.

Perchè un legno disteso orizzontalmente con maggiore facilità si pieghi, ch' essendo inclinato: e qual proporzione si trovi in diverse inclinazioni.

Un legno inclinato A B (Fig. LXVII.) *più difficilmente si piega, e si rompe, che quando è disteso orizzontalmente, in ragione di* A B *a* B C. *Non però qualsivoglia peso abile a piegare un legno, può ancora spezzarlo, imperocchè un legno torcendosi viene tirato con minor forza, di quel che sia stando disteso orizzontalmente, per essere tirato con direzione ad angolo ottuso.*

Certamente, se il legno A B, disteso fusse orizzontalmente, tutta la sua lunghezza A B servirebbe di leva, che appoggiata a' termini A, e B sarebbe forzata dalla potenza applicata nel mezzo F, secondo la direzione F D, che allora sarebbe perpendicolare all' orizzonte. Ma venendo lo stesso legno appoggiato col termine B al pavimento C B, e col termine A al muro C A, si scorcia la leva, e diventa della sola grandezza C B, che è la distanza perpendicolarmente frapposta a questi termini d' appoggio; e per questa ragione ben dice il Sig. Viviani, che in questo sito più difficile sia il piegare il legno; appunto in proporzione di A B a B C, che sono le leve adoperate dalla potenza nell' uno, e nell' altro caso. Ma circa allo spezzare il medesimo legno, parmi che oltre la considerazione della leva più corta, vi sia ancora maggior sezione, e conseguentemente maggiore resistenza da superare; perchè spingendo all' ingiù, se il legno di-

steso fusse orizzontalmente, si farebbe la rottura nella sezione D F perpendicolare alla lunghezza d' esso legno: ma essendo obliquo, e volendo pure spignere direttamente abbasso (purchè i termini A, e B stessero fermi, sicchè una simil pressione non facesse sdrucciolare il legno coll'estremo B per C B, e coll' estremo A per A C) ne seguirebbe lo spezzamento nella sezione F E perpendicolare all' orizzonte, ed obliqua alla lunghezza di esso legno: la quale sezione è maggiore della prima in ragione di F E ad F D; onde per la prop. 3 cresce il momento della resistenza in proporzione del quadrato F E al quadrato E D, che per la similitudine de' triangoli D F E, C B A è la stessa colla ragione del quadrato A B al quadrato B C; sicchè aggiungendoci la difficoltà, che dipende dallo scorciamento della leva, la quale cresce di nuovo in ragione di A B a B C: pare che se ne dovrebbe inferire, che cresca la difficultà dello spezzamento in proporzione del cubo A B al cubo B C. Ma per illustrare meglio questo punto, si dovrebbe considerare la direzione d'ambi i sostegni B ed A, la quale non è la medesima, come quando disposti sono nella stessa linea orizzontale, e però ciò darebbe campo a molte particolari speculazioni, alle quali per ora non posso applicare, avendo altre occupazioni alla mano, per cui ne vengo distratto.

Proposisione LXXIX. Quesito XXVI.

Sia qualunque solido A B, (Fig. LXVIII.) il quale sostenuto in qualsivoglia punto C, interposto fra gli estremi A, B, resti equilibrato dal peso delle sue parti, e de' pesi E, F attaccati ad essi estremi: sicchè sia in procinto di rompersi sopra l'appoggio C. Si cerca, se dovendo il medesimo solido star fitto nel muro, fino allo stesso punto C, di maniera, che l'una, e l'altra solamente delle sue parti, cioè A C, ovvero C B rimanesse fuori pendente in aria, vi si ricerchi lo stesso, o pur doppio peso di ciò, che prima si aveva in C A E, o in C B F, per fare che ne segua in tale stato lo strappamento?

Pare a prima vista, che doppio peso vi si ricerchi; imperocchè, mentre i pesi C A E, C B F superano la resistenza della sezione in C, è necessario, che l'uno, e l'altro abbia uguale momento, cioè che si equilibrino d'intorno al punto C, prima che ne segua la rottura; di maniera che il centro di gravità del solido, e de' pesi attaccati si ritrovi nel sostegno C; perchè qualunque volta il detto centro fosse dall'una, o dall'altra banda, come dentro la linea C A nel punto D, sareb-

be impossibile, che il solido si rompesse: mentre il centro di gravità di tutta la mole si potrebbe muovere abbasso; e però sarebbe costretto a discendere (per la prima supposizione) tirando allo ingiù il complesso del solido, e de' pesi attaccativi tutto intero, fino attanto che non incontrasse ostacolo alcuno, da cui venisse fermato. Se adunque il momento del peso C A E *uguaglia il momento del peso* C B F, *ciò sarà lo stesso che dire, esservi d'uopo di due momenti uguali ciascuno al solo* C A E, *o al solo* C B F, *per superare la resistenza della sezione del solido in* C. *Quando adunque la parte* C B F *sarà impegnata dentro il muro, e la sola parte* C A *avanzerà fuori, la resistenza della sezione in* C *rimarrà la stessa di prima, e svanito essendo il momento del peso* C B F, *vi rimarrà solamente il momento del peso* C A E, *cioè la metà dei due momenti, che già cospiravano a fare la detta rottura; e però sarà necessario raddoppiare il momento* C A E *per fare che segua lo strappamento; di maniera che, se il peso* E *era di* 100. *libbre, ed il peso della parte del solido* C A *facea forza nell' estremo* A *come per libbre* 20., *onde tutto il momento fusse di libbre* 120., *pare che si doverebbero aggiungere in* A *altre* 120. *libbre, per fare che il solido in* C *si rompesse.*

Ma considerando meglio la cosa, ciò assolutamente non può essere, anzi si dee concludere, che lo stesso peso appunto basti in questo caso a fare lo strappamento, servendo il muro stesso per quel contrappeso C B F, *che manca dall' altra parte.*

L' apparente discorso addotto sul principio dal Sig. Viviani per concludere, che si ricercasse doppio peso per istrappare dal muro una di quelle parti del solido, che prima si equilibrava coll' altra sopra un sostegno posto nel mezzo d' entrambe, siccome passò per la mente al nostro Autore nella sua giovinezza; e fu poscia da lui avvedutamente corretto; così non è da stupirsi, che un altro Autore assai celebre in queste materie tacitameute supponesse ciò nella prop. 2. del lib. 2. *De resistentia solidorum*, come principio per se noto, ma è ben maraviglia, che nè meno in sua vecchiezza sapesse egli rinvenirsi dell' errore, anzi pretendesse con un simile paralogismo convincere me di grosso abbaglio commesso nel confutare la citata, con altre sue proposizioni. Veggasi il discorso di A. M. stampato in Lucca del 1714. alla pag. 47. ove supponendo, che un peso posto in C (Fig. LXIX.) si equilibri colla resistenza della base A E d' un prisma A C M fitto nel muro, ne raccoglie, che se il prisma staccato dal muro si ponesse in bilico sopra la linea F P posta nel mezzo del prisma, lo

stesso peso rimanente in C averebbe oramai la metà sola del momento di prima (il che sin qui è verissimo) e che però uguaglierebbe *la metà della resistenza* della sezione N O P F (uguale all' altra A B E D) onde supponendosi un altro peso attaccato al termine D, uguale a quello che era in C, si verrebbe ad equilibrare *l' altra metà della detta resistenza*; sicchè tra tutt' e due si equilibrerebbero colla medesima intera resistenza della sezione suddetta N O P F. Il che (con sua buona pace) non è vero altrimenti. Perchè l' altro peso attaccato in D, equilibrerà bensì il solido, sicchè non trabocchi dall' altra banda per l' azione del peso posto in C, ma non saranno già sufficienti tutti due que' pesi insieme ad equilibrare la resistenza O F, con mettere in procinto il solido di rompersi su l' appoggio P F. Essendo perciò necessario, che siccome il peso posto in C colla distanza C F ha solo la metà del momento, che aveva prima colla distanza C D, per vincere alla sua parte la resistenza della sezione; così nello stesso punto C, alla distanza C F si ponga un peso doppio di prima (ed altrettanto poi dall' altra banda in D) perchè giunga ad avere ciascuno d' essi dalla sua parte un momento uguale alla resistenza da superarsi: nulla giovando, che l' altro peso uguale al primo si ponga dall' altra parte in D, dove non è d' ajuto a tirare dalla banda di C, ma solo fa una

parte di quell' azione, che prima faceva il muro, quando vi era impegnato, dentro il solido, come acutamente ha avvertito in questo luogo il Sig. Viviani. Perchè in somma (come dico nella parte terza della mia risposta Apologetica, confutando il suddetto discorso cap. 5. n. 6.) l' effetto dello strappare un solido sempre ha da dipendere da due forze contrarie, delle quali l' una tiri per un verso, l' altra o tenghi forte dal canto suo, o tiri dalla banda opposta, sicchè non tutte le parti del solido si muovono verso le stesse bande, secondando l' impressione della forza attaccatavi.

Il che, a mio credere, dipende da questo, che la stessa coerenza delle parti del solido è cagionata da certe forze (qualunque elle sieno, o si riferiscano all' interna disposizione, ed intralciamento delle parti della materia, quinci e quindi contigue alla sezione, o provengano dalla pressione del fluido ambiente, o derivino da qualsivoglia glutine interposto) le quali premono l' una contro dell' altra, spingendo questa parte contro di quella, e quella vicendevolmente contro di questa: appunto come due Lottatori, affrontatisi con ugual forza, si urtano e si sostengono reciprocamente, mantenendosi uniti; onde per disgiungerli, non basta, che alquante forze si applichino per distaccare l' uno, se intanto altre forze uguali non accorrono a tener fermo l' altro, o a ritirarlo indietro,

dalla lotta; altrimenti quello de' competitori, a cui niuna forza si applicasse, per tenerlo fermo, o per rimuoverlo dal contrasto, seguitando ad urtare il compagno, si lascierebbe trasportare a seconda dalla piena di quelli, che applicati fussero a ritirare l' altro dal duro cimento. E così è verissimo, che il muro, in cui sta fitto un solido, equivale appunto ad un contrappeso, che equilibrasse l' azione dello stesso solido, o de' pesi attaccativi, se in vece d' essere impegnato immobilmente nel muro, fusse posto in bilico nella stessa sezione: essendo che esso muro caricando la porzione del solido, che tanto o quanto entra dentro di esso, la ferma, e gl' impedisce di muoversi al movimento dell' altra parte del solido, che resta al di fuori; onde se l' azione di essa, e de' pesi aggiuntivi prevale alla coerenza delle fibre, che connettono una parte coll' altra, ne segue lo strappamento, e la separazione di questa da quella.

Proposizione LXXX. Quesito XXVII.

Se il cilindro A B (Fig. LXX.) *fitto nel muro è bastante a spezzarsi in* B, *cioè a superare la resistenza* B *col proprio peso, e colla leva* A B: *aggiungendo dall' altra parte altrettanto cilindro* B C, *si*

cerca, se la medesima resistenza B *venga violentata con doppia forza; e se per ispezzarsi col sostegno in mezzo, voglia essere la metà più sottile, o di lunghezza media proporzionale tra* A B, *e* B D *metà di* A B?

Secondo il Galileo, è manifesto che B C ugualmente grosso, ed ugualmente lungo di A B, tiene in equilibrio lo stesso A B, e tutte due insieme pareggiano la stessa resistenza della sezione B, che veniva pareggiata dal solo A B fitto nel muro colla sua testata B, mentre dice espressamente pag. 77. della presente edizione. *Il cilindro, che gravato dal proprio peso sarà ridotto alla massima lunghezza, oltre alla quale più non si sosterrebbe, o sia retto nel mezzo da un solo sostegno, o da due nell' estremità, potrà essere lungo il doppio di quello, che sarebbe fitto nel muro, cioè sostenuto in un sol termine.* Ed il dubbio del Sig. Viviani resta di già risoluto da lui medesimo nella prop. antecedente, osservando, che quando A B è fitto nel muro, lo stesso muro fa la forza dell' altro contrappeso B C, di momento pari a quello della porzione B A, che sporge fuori del muro; onde nell' uno e nell' altro caso la resistenza B è violentata dalla medesima azione di due forze uguali, e contrapposte; ed è giusto, come se un filo si attaccasse coll' estremo suo ad un muro, e dall' altro

capo si tirasse fino ad essere in procinto di romperlo; o pure da un capo, e dall' altro si applicassero due forze opposte per istrapparlo, che sempre l'effetto dipenderebbe dalla stessa quantità di forze applicate, non giammai tutte da una banda, ma sempre parte da un capo, e parte dall' altro.

Circa poi il dover essere la lunghezza del cilindro posto in bilico tale, che ciascuna delle sue parti sia media proporzionale tra la A B, e la B D metà di essa, come accenna il nostro Autore; ciò si verifica, quando debba il cilindro appoggiarsi a due sostegni posti negli estremi, come avvertì Monsù de la Hire nella prop. 126. delle sue meccaniche; ma non già nel caso, che reggere si debba sopra un sostegno posto nel mezzo; ma anzi nè meno quando si regga da due bande, qualora venga caricato ancor per di sopra, e fortemente impegnato il cilindro dall' una, e dall' altra parte nel muro: nel qual caso è verissima la sentenza del Galileo di sopra accennata; conforme dissi nella mia risposta Apologetica pag. 123.

Che se alcuno bramasse la dimostrazione di ciò, che di sopra ho detto con Monsù de la Hire, acciocchè non nasca verun dubbio dalle opposizioni fattemi in contrario, quando nel luogo citato abbracciai quella dottrina, eccomi pronto a soddisfare.

Sostengasi il cilindro A C sopra il sostegno corrispondente al suo mezzo B, equilibrato, ed in procinto di rompersi nella sezione B: e sia la lunghezza E F d' un altro cilindro ugualmente grosso, appoggiato a due sostegni ne' termini E, F, media proporzionale fra tutta la A C, e la metà sua A B (onde conseguentemente, dividendolo per mezzo in G, sarà la G E, ovvero la G F, media proporzionale tra la A B, e la sua metà B D). Dico che questo con uguale momento, verso la resistenza della sezione di mezzo G, rimarrà precisamente sopra i detti sostegni appunto equilibrato.

Imperocchè essendo la metà del peso A C, cioè il peso di A B, applicato nel suo centro di gravità D, e l' altra metà B C nel suo centro H, per far forza sopra la resistenza della sezione B; e similmente reggendosi la metà del peso E F dal sostegno E, e l' altra metà dal sostegno F, colle distanze G E, G F medie proporzionali fra le lunghezze A B, B D; sarà A B ad E G, cioè la metà del peso A C alla metà del peso E F, come reciprocamente la distanza E G alla distanza D B, dalle quali dipendono; e però saranno uguali i loro momenti. Si dirà lo stesso dell' altre due metà d' ambi i pesi, applicate similmente a rompere l' uguali resistenze B, G; adunque averà la stessa forza il cilindro A

C sopra la resistenza B, che il cilindro E F sopra una pari resistenza G: quando sia E G media tra l' intera A C, e la sua metà A B. Il che si dovea dimostrare.

Nè sarebbe ragionevole l' opporre, che la metà del peso E F, cioè E G penda dal sostegno E con una distanza uguale alla metà di E G, dove sarebbe il centro di gravità del cilindro E G, e non da tutta la E G, come si è supposto nell' addotta dimostrazione; perchè tutto il peso del cilindro E F gravitando nel suo centro G, è manifesto, doversi immaginare ambidue le metà di esso ivi racculte nel punto G, e non altrimenti distribuite, sicchè l' una graviti nel punto di mezzo fra G ed E, e l' altra nel punto di mezzo fra G ed F, come accaderebbe se fussero staccate, e non connesse in G, che se la coerenza delle parti non le richiamasse tutte in un centro comune, ognuna dell' infinite parti, che il cilindro compongono, doverebbe esercitare la sua forza in un centro particolare, e distinto, e non cospirerebbero tutte a maniera d' un solo peso, siccome fanno, avanti d' essere staccate l' una dall' altra.

Ma perchè la cosa è di grandissima importanza, nè manca chi ha preteso di oscurare la verità con apparenti ragioni; acutamente inventate per difendere il suo impeto, ed incaricare me di gravissimo sba-

glio, non sarà se non bene lo scoprire la fallacia di chi (Discorso di A. M. pag. 55.) francamente asserisce, che le due metà d'un cilindro, o prisma appoggiato ne' suoi estremi *non hanno per leve favorevoli, se non le metà* delle lunghezze, che sono dal mezzo a ciascun termine del solido, ed aggiugne (pag. 56.) che il peso di un cilindro allora solamente tutto si raccoglie, ed esercita la sua energia sul proprio centro di gravità, *quando pende in aria liberamente, senza esser retto da alcun sostegno*; ma quando è appoggiato ne' suoi estremi a due sostegni, *i quali vengono a scemarli la metà del suo peso, l'altra sua metà sola viene ad esercitare la sua forza nel centro di gravità.* Nella quale dottrina erronea molti sbagli si contengono, essendo cosa impossibile, *che un peso penda in aria, senza esser retto da alcun sostegno*; e però non farebbe mai forza un solido nel suo centro di gravità, se non in caso, che miracolosamente pendesse in aria senza che alcuna cosa il reggesse; nè essendo vero, che i sostegni *scemino la metà del peso d'un solido*, che sia appoggiato, onde gli rimanga solamente *l'altra metà da esercitarsi nel centro di gravità*; imperocchè i due sostegni reggono tutto il peso, e da esso con vicendevole azione sono premuti, di maniera però che mezzo il peso si appoggi all'uno, e mezzo all'altro, senza veran dispendio dell'azione della gra-

vità da esercitarsi appunto nel mezzo, dove è il centro del solido, con tutto il suo momento, il quale non viene diminuito, ma bensì equilibrato con azione contraria da' sostegni; altrimenti ne seguirebbe, che siccome al parere di questo Autore un solido appoggiato a due sostegni pesa nel centro per la metà sola della sua gravità; appoggiandosi poi a 4. ovvero 6. sostegni, dovrebbe premere con un quarto, o con un sesto solo della gravità sua; e sostenendosi sopra l'orlo d' un corpo stabile equivalente ad infiniti sostegni, non doverebbe premere più per niente; e così un cavallo, che si regge su quattro piedi, un palco eretto sopra sei pilastri, una cupola d' ogn' intorno appoggiata sul cornicione, che la circonda, non doverebbero aggravare nel centro loro, se non per una parte quarta, sesta, o infinitamente piccola del loro gran peso. Il che se è assurdo, si concluda, che i sostegni non iscemano adunque in conto alcuno la gravità de' solidi, nè impediscono, che non l' esercitino tutta nel centro loro: come forse meglio potrà intendersi colla seguente costruzione.

S' intenda sospeso il cilindro D F (Fig. LXXI.) con due fili D A, F B perpendicolari all' orizzonte, i quali passando per due troclee fisse per di sopra sieno tirati da' due pesi I, K abili ad equilibrarsi col medesimo solido D F; sarà certamente ciascun d' essi pesi uguale al peso della me-

tà del cilindro, e tutti e due insieme uguali al totale peso D F. E perchè in ogni equilibrio di forze contrapposte, ed ugualmente distanti dal centro del moto, come accade in questo caso, mercè le suddette troclee, fra i pesi K, ed I da una banda, ed il cilindro D F dall'altra, conviene che ugualmente prema dal suo canto la forza, che tira da un canto, e l'altra, che tira dall'altro lato: egli è pure evidente, che il cilindro D F, con tutto che sia retto in ambi gli estremi, dovrà premere nel centro di gravità E con tutta la forza del suo peso, siccome li due contrappesi I, K con tutta l'energia del peso loro, uguale a quello del cilindro D F premono altresì dal canto suo, ed è vanità l'immaginarsi, che il peso D F per la metà sia sostenuto, e solo per l'altra metà graviti; ora lo stesso accade, se rotti i fili D A, F B, o rimossi i contrappesi I, K, si lascia posare il cilindro D F sopra due sostegni sottoposti all'estremità: i quali sostegni lo spigneranno all'insù, e lo reggeranno, appunto come prima faceano i suddetti fili, ed i contrappesi attaccativi; e ciò senza impedire punto l'azione della totale gravità di esso cilindro, la quale si eserciterà come prima nel centro E con tutto il suo momento.

Del che per avere ancora più chiara idea si consideri, che la forza, d'onde dipende la coerenza delle fibre d'un solido, (come si è detto di sopra) dee essere se-

condo la direzione dell'asse del cilindro, che passa per tutti i centri di gravità delle sue sezioni: e che questa forza opera con due direzioni direttamente opposte, calcando una sezione contro l'altra contigua. Immaginandosi adunque la detta forza, che tiene unite le fibre del solido nella sezione E, rappresentarsi dalla linea D F, di cui la parte F E ci esprima l'azione che spinge da F verso E; e la parte D E ci figuri l'altra contrapposta azione, che ugualmente preme viceversa da D verso E, queste due forze essendo uguali, e direttamente opposte, si equilibrano; sicchè in virtù di esse le parti del cilindro stanno unite, movendosi di conserva, quando da una sola forza, quale sarebbe la gravità, venissero tirate al basso per la direzione E G, la quale non si oppone a veruna delle dette direzioni F E, D E, ma è loro indifferente. Ma essendovi di più due forze, che spingono al contrario di E G, come sono i contrappesi I, K, o in vece d'essi i sostegni D, F, da' quali viene retto il cilindro, per ritrovare ciò che risultar debbe da queste azioni, si faccia, come la forza, che premendo da F verso E contribuisce alla resistenza del cilindro, sta alla forza del sostegno F, ovvero del contrappeso K, così E F ad F B; e compiendo il rettangolo E F B H, si averà nel diametro F H la forza composta da ambedue, come è notissimo a' Meccanici, e da

me fu dimostrato nell' *Epistola de momento gravium pag.* 13. e similmente dall'altra forza, che concorre alla resistenza della sezione E per la direzione D E, e dalla forza del sostegno D, o del contrappeso I, nella direzione D A, si comporrà la forza D H, che risulta da entrambe; e finalmente compiendo il parallelogrammo D H F G, si averà nel diametro G H la forza composta delle due F H, D H, cioè delle G D, G F; alla quale forza G H debbe essere uguale la forza del peso esercitato dal cilindro D F (o da un peso avventizio G sospeso in E, quando si astragga dal peso d'esso cilindro) mercecchè debbe contrastare alla detta forza, eludendone l'effetto coll' azione contraria nella direzione H G; e però il peso esercitato dal cilindro F D (o dal peso G surrogato in vece d'esso) nel centro E starà alla forza esercitata da ciascuno di detti sostegni (come F, o dall' equivalente contrappeso K) come H G ad F B, cioè ad H E, e però la detta forza di peso esercitata in E sarà dupla della forza del contrappeso K, o del sostegno F; sicchè essendo (come mostra la sperienza a chi non si appaga della ragione) il peso K una metà del peso totale del cilindro D F, dovrà esso cilindro esercitare nel centro E una forza uguale a tutto il suo peso: e similmente il peso G che (astraendo dalla gravità del cilindro) si dovesse a tale effetto in E sur-

rogare, essere dovrebbe uguale a tutto il peso d'esso cilindro, come io avea detto, e non alla sola metà, come pretende il censore.

Una sola opposizione di qualche momento mi fu fatta da un chiaro Geometra; ed è che se un cilindro A D (Fig. LXXII.) è sostenuto ne' termini A, D per impedire la gravitazione di esso nel centro C, basterebbe sottoporvi il sostegno C, il quale ivi si opporrebbe all' azione della gravità del cilindro esercitata in C; ma il sostegno C, dovendo reggere la metà della parte C D, e la metà dell' altra parte C A, non dovrà sostenere, se non la metà dell' intero cilindro A D; adunque pare, che la pressione esercitata da esso cilindro nel centro C non possa essere se non uguale alla metà del peso A D.

A ciò risposi, che primieramente il discorso proverebbe, che in qualsivoglia punto B fuori del centro C del cilindro, operi la gravità di esso colla metà sola della sua azione; perchè similmente collocando un sostegno B per sostenerne la forza, questo si troverebbe carico della metà di B D, e della metà di B A, cioè della metà di tutta la A D; e però in ogni luogo il cilindro premerebbe colla metà del suo peso, quando presso a' sostegni non può avere azione così sensibile.

In secondo luogo conviene avvertire, che quando si sottopone il sostegno C al

mezzo del cilindro A D, ciascuno de' sostegni estremi, A, e D viene sollevato dal peso, che prima sorreggeva, essendo che prima ognuno d'essi sosteneva la metà del cilindro A D, ed ora solamente ne reggono un quarto per uno: cioè al D tocca una metà del cilindro C D, ed all' A una metà dell' A C, gli altri due quarti rimanendo appoggiati al sostegno C; d'onde si deduce, che il sostegno C non regge altrimenti tutta l'azione, che il cilindro A D esercitava in C, ma la divide in due ugualmente; sicchè quindi innanzi tutta la parte A C graviti nel mezzo fra A, e C; e tutto il resto graviti nel mezzo fra C, e D, come se fussero due cilindri divisi; e per tanto ciò nulla serve per provare, che in C, avanti che si ponesse il sostegno, gravitasse il cilindro colla metà del suo peso, piuttosto che col peso totale di se stesso.

Proposizione LXXXI. Quesito XXVIII.

Sia il cilindro grave A E (Fig. LXXIII.), *sostenuto fuori del mezzo in* G. *Cercasi il peso, che si dee attaccare in* E, *acciocchè la parte* B E *del cilindro faccia equilibrio coll' altra parte* A G.

Si faccia, come la leva B C *alla* B A, *ovvero come il peso* B E *al peso* B D,

così il peso B D *ad un altro, dal quale si cavi il peso* B E; *e dell' avanzo si prenda la metà* F, *che questa sarà il peso, il quale attaccato in* E, *della parte* B E *equilibrerà l' altra parte* B D.

Imperocchè tal momento ha il peso F attaccato in E, quanto averebbe il doppio di esso attaccato nel mezzo di G E (per essere così i pesi reciprochi alle distanze) dove pure s' intende che faccia forza nel suo centro di gravità il peso della parte B E; siccome il peso dell' altra B D fa forza nel mezzo della D G; dunque, in caso d' equilibrio, debb' essere, come B C a B A, o come il peso B E al peso B D, così B D all' aggregato di B E, e del doppio di quel peso, che dee a tale effetto attaccarsi in E; e però il peso da attaccarsi in E è la metà di ciò, che rimane, cavando dal detto peso quarto proporzionale, il peso B E, come dice il Sig. Viviani.

Proposizione LXXXII. Quesito XXIX.

Sia il cilindro grave A B (Fig. LXXIV.), *orizzontale sostenuto fuori del mezzo della sua lunghezza, come in* E; *è chiaro, che la parte maggiore* A E *preponderera. Cercasi, per mantenerlo orizzontale quanto peso si dovrà sospendere nell' estremità* B.

Sia B D metà della lunghezza B C, e ıcciasi come B E ad E D, così il peso dıutto il cilindro A B, al peso F, che qsto sarà il cercato da sospendersi in B.

Poichè di tutto il cilindro A B il otro di gravità è nel mezzo, cioè in D; del peso F il centro di gravità è sospe-: in B; adunque il centro comune di ;avità del cilindro, e del peso F sarà quel punto, che divide la distanza dei ntri in reciproca proporzione de' pesi. Ma fece, come il cilindro A B al peso F, sì B E ad E D; adunque in E sarà ɜquilibrio. Il che ec.

Questa è la stessa colla precedente, ı ho stimato bene di aggiungerla, per ingegnosa, ed elegante maniera adoperanel dimostrarla, con provare, che così centro comune di gravità del cilindro, del peso attaccato corrisponde al luogo el sostegno E; onde non potendo questo ıuoversi allo ingiù, è forza che il tutto tia fermo in equilibrio, a tenore della ɐrza supposizione.

Proposizione LXXXIII. Quesito XXX.

Per lo contrario, se un peso F sarà attaccato all' estremità d'un cilindro, come A B, cercasi in qual punto della sua lunghezza si debba sottomettere un soste-

gno, *in modo che, stando il cilindro o*- *zontale, si faccia l' equilibrio?*

Dividasi C B *per mezzo in* D, *e fa*- *ciasi, come il peso del cilindro* A B *peso* F, *così* B E *ad* E D, *che il pun* E *sarà il cercato, e si dimostrerà con sopra, perchè i detti pesi sono sospe con i loro centri di gravità in distanz reciproche dal sostegno* E; *che però ec.*

Corollario I. *Se dunque il peso* F *d appendersi all' estremità* B, *sarà dato ugua*- *le al peso del cilindro* A B, *si dovrà met*- *tere il sostegno* E *in tal luogo, che la lunghezza* C E *sia tripla della* B E; *perchè divisa per mezzo* C E *in* D, *sarà allora la* E B *uguale alla* E D; *ma per la pre*- *cedente proposizione, facendosi come* B E *ad* E D, *così il peso* A B *al peso* F, *questo è quello, che debbe appendersi in* B, *acciocchè si equilibri col dato cilindro nel sostegno* E: *adunque il peso* A B *è ugua*- *le al peso* F.

Corollario II. *E se vorremo, che il peso* A B *al peso* F *abbi una data pro*- *porzione di* G B *a* B H, *sarà necessario dividere la* B D *in modo, che la* E B *alla* E D *abbia la proporzione di* G B *a* B H; *ed il punto* E *sarà il sostegno.*

Corollario III. *Ma se vorremo mette*- *re il sostegno in luogo, che poi tanto pe*- *si la parte del cilindro* B E, *quanto il solido* F; *dovrà dividersi la* D B *in mo*- *do, che il rettangolo di tutta la* C B *nel*-

la parte di mezzo D E, *sia uguale al quadrato* B E, *perchè allora sarà, come* D E *ad* E B, *così il peso* F *al peso* A B, *ovvero così* E B *alla* C B; *ma come* E B *alla* C B, *così il peso di* B E *allo stesso peso* A B; *adunque tanto pesa* F, *che* B E.

Corollario IV. *E se vorremo, che il peso* F *pesi tanto, quanto la parte* C E: *si dovrà segare la* D B *in* E *in modo, che il rettangolo di tutta la* C B *nella parte di mezzo* D E *sia uguale al rettangolo* C E B; *perchè allora sarà, come* C B *a* C E, *così* E B *a* D E; *ma* C B *a* C E *sta come il peso* A B *al peso* A E, *ed* E B *a* D E *sta come lo stesso peso* A B *al peso* F, *quando si fa l' equilibrio; adunque i pesi* A E, *ed* F *sono uguali.*

I due problemi supposti dal Sig. Viviani nel corollario 3. e 4. si sciolgono nella seguente maniera.

Data una retta C B (Fig. LXXV.) (fig. I. divisa per mezzo, o più generalmente divisa in qualsivoglia proporzione) nel punto D: talmente di nuovo segarla in E, che il rettangolo di C B in D E uguagli il quadrato di E B.

Alla retta C B si applichi un rettangolo eccedente d' una figura quadrata, ed uguale al dato C B D; e sia questo C I B; ed alla B I pongasi uguale la B E; poichè dunque il rettangolo C B D, cioè i due C B E, e C B in D E, uguale ugua-

gliano il rettangolo C I B, cioè la somma del rettangolo C B I, e del quadrato B I, ovvero i due C B E, e quadrato B E; tolto di comune il rettangolo C B E, sarà C B in D E uguale al quadrato di E B; il che ec.

Ma se data la retta C B (fig. 2. divisa per mezzo) o in qualsivoglia ragione in D, si vorrà dividerla altrove in E in maniera, che il rettangolo di C B in D E uguagli il rettangolo C E B.

Alla retta C B si ponga per diritto la C I uguale ad essa; ed alla retta I B si applichi un rettangolo uguale al dato C B D, mancante però d' una figura quadrata; e sia questo rettangolo I E B. Adunque il rettangolo C B D, cioè la somma de' rettangoli C B E, e C B, in D E, uguaglia il rettangolo I E B, che è quanto dire i due rettangoli I C in E B, e C E B; tolgansi da questa, e da quella parte i rettangoli C B E, ed I C in E B, che sono uguali, rimarrà C B in D E uguale al rettangolo C E B. Il che ec.

Proposizione LXXXIV. Teor. LIV.

La scala de' momenti di pesi uguali C, D (Fig. LXXVI.) *attaccati ad una libra sostenuta ne' suoi estremi* A, B, *sta nelle linee* E G, F H *della parabola* A H B,

parallele al diametro, essendo la libra A B *base di detta parabola.*

Imperocchè i detti momenti sono, come i rettangoli A E B, A F B, fatti dalle parti di essa libra, come dimostra il Galileo nella proposizione 13. Ma a questi rettangoli sono proporzionali le linee G E, H F tirate nella parabola parallele al diametro. Dunque ec.

Proposizione LXXXV. Teor. LV.

Le resistenze d'un cilindro ne' punti A, B, C, D, E, L, (Fig. LXXVII.) *ec. sono come le linee* A 1, B 2, C 3, D 4, E 5 *ec. terze proporzionali dopo l'applicate nella parabola, e nel parallelogrammo circoscritto, equidistanti al diametro.*

Poichè la resistenza in A *alla resistenza in* C *sta, come il rettangolo* G C F *al rettangolo* G A F, *secondo il Galileo, cioè come la linea* C H *alla* A I, *cioè come* C O *a* C 3, *ovvero come* A I *a* C 3; *dunque se la resistenza* A *si ponga essere la* A I, *la resistenza in* C *sarà la* C 3; *e così dell'altre; il che ec.*

E perchè la linea 1 2 3 4 *non concorre mai colla retta* G 8, *di qui è manifesto, che le resistenze verso il punto* G *vanno crescendo sempre, facendosi mag-*

giori di qualunque data forza, *e nel punto* G *volervi forza infinita*, *perchè la linea* G 8, *che è terza proporzionale dopo il punto* G , *e la linea* G M, *è infinita.*

Nota la curva 1 2 3 4 *è una iperbola seconda.*

Molte sono le curve, che possono meritare il nome di *seconda iperbola*; però non avendo il Sig. Viviani dichiarato particolarmente il suo pensiero, non sarà superfluo l' esaminare in questo luogo, come verificare si possa il suo detto, acciocchè alcuno ingannato non rimanga, pensando ch' egli intenda dell' *iperbola quadratica*, che più comunemente per *seconda iperbola* viene computata: quella cioè, in cui i quadrati delle ordinate ad un asintoto, sono reciprocamente come le porzioni d' esso asintoto tagliate dal centro: o pure di quella, in cui i quadrati dell'ordinate ad un diametro fossero come i parallelepipedi contenuti dal quadrato d' una parte, e dalla lunghezza dell' altra parte d' esso diametro intercette fra detta ordinata, ed i termini del trasverso; o in somma d' altra curva, che abbia più manifesta relazione, ed analogia coll' iperbola ordinaria, che non ha veramente la curva in questo luogo descritta.

Si osservi per tanto, che il profondo, e celebratissimo Matematico d' Inghilterra il Cav. Isacco Nevvton, nel trattato che stampò delle linee del terz' ordine, acutamente

notò, potersi dividere le iperbole in più generi, secondo il numero degli asintoti, che ad esse potevano convenire, dicendo: *Hyperbola primi generis duas habet asymptotos, ea secundi tres, ea tertii quatuor, et non plures habere potest, et sic in reliquis.* Quindi si rifletta, che continuando la descrizione della curva proposta dal nostro Autore, con adattare la stessa costruzione alla parabola prolungata per di sotto, prendendo le *c* 3, *e* 3 (Fig. LXXVIII.) da per tutto terze proporzionali alle *c* h, *c* o; dal che si vede, che oltre la parte superiore 3 1 5 della curva, che giace fra' due asintoti paralleli G 8, F 9, ne nascono due altre parti, o gambe inferiori 3 3, 3 3, alle quali, oltre i suddetti due asintoti continuati, si aggiunge per terzo asintoto la G F prolungata; e però, secondo la distribuzione fatta dal suddetto Nevvton, si riconosce questa curva per un' *iperbola del secondo genere*; ed è appunto quella, che da lui si descrive per la specie sessagesima, e si asserisce essere un *iperbolismo della iperbola*, che in ordine è il quarto: intendendo per iperbolismo la figura nata dall' applicare il rettangolo contenuto dall' ordinata di una sezione conica, e di una data retta, alla porzione comune tagliata nel diametro da uno de' suoi termini. Come nel nostro caso, essendo l' iperbole opposte E, A *e*, il cui asse trasverso sia A, ed il secondo asse conjuga-

to sia uguale a ciascuna delle rette A G, A F; e presa qualunque ordinata dell'iperbola D E, si faccia come A D a D E, così A I a D 3 (e similmente nell' opposta sezione, come A *d* a *d e*, così A a *d* 3) la figura 1 3, coll' altre sue parti 3 3 quindi nate, chiamasi dal Nevvton *iperbolismo dell' iperbola*, ed è la sessagesima specie dell' iperbole del secondo genere.

Ora questa non essere altra, che la curva sopra descritta dal Sig. Viviani, si dimostra così. Essendo il quadrato A D al quadrato D E, come il quadrato A I al quadrato D 3, cioè al quadrato A C; ed il quadrato D E al rettangolo I D A essendo nell'iperbola, come il quadrato del secondo diametro A G al quadrato di A I: sarà per l'ugualità perturbata, il quadrato A D al rettangolo I D A, come il quadrato A G al quadrato A C; e per la conversione di ragione, il quadrato A D al rettangolo D A I (cioè la retta D A, o pure 3 alla A I) sarà come il quadrato A G al rettangolo G C F, che nella parabola è appunto, come la A I alla C H; onde la C 3 è terza proporzionale dopo le due C H, A I, secondo la costruzione del Sig. Viviani; e per tanto la curva da lui qui descritta è la medesima con questa specie di seconda iperbola considerata dal Nevvton.

È manifesto, che il lato retto dell' iperbole I E, A *e* è lo stesso con quello della

parabola G I F, cioè la terza proporzionale dopo le due I A, ed A G.

Proposizione LXXXVI. Teor. LVI.

Sia il prisma triangolare A B N (Fig. LXXIX.), *di cui la faccia rettangola* A N *sia parallela all'orizzonte, e sia sostenuto sopra l'estremità* O A, C N; *e sia il peso* I *nel mezzo della leva* A C, *che pareggi la resistenza della sezione di mezzo* B E; *e l'altro peso* L *fuori del mezzo, che pareggi la resistenza della sezione* F G; *Dico che tali pesi assoluti* I, L *hanno tra di loro la proporzione delle parti disuguali* C H, H A.

Poichè inteso in H *il peso* M *uguale ad* I, *essendo il momento del peso* L *uguale al momento della resistenza* F G, *ed il momento* I *pareggiando il momento della resistenza* B E, *sarà il momento di* L *al momento di* I, *come il momento della resistenza* F G, *al momento della resistenza* B E, *cioè per la prop.* 3. *come il quadrato* F H *al quadrato* B D, *o pure come il quadrato* A H *al quadrato* A D, *cioè al rettangolo* A D C; *ma il momento* I *al momento* M, *per la prop.* 84. *sta come il rettangolo* A D C *al rettangolo* C H A; *dunque per l'ugual proporzione, il momento di* L *al momento di* M, *cioè*

il peso assoluto di L *al peso assoluto di* M, *ovvero al peso assoluto* I, *sta come il quadrato* A H *al rettangolo* C H A: *cioè come la linea* A H *alla* H C; *il che si dovea dimostrare.*

Proposizione LXXXVII. Quesito XXXI.

Si cerca la scala, che dimostri, con quale proporzione vadano scemando dal mezzo D *i pesi assoluti, che pareggiano le resistenze di varie sezioni nel suddetto prisma triangolare.*

Prolungata la B D (*Fig.* LXXX.), *si faccia ad essa uguale la* D Q, *e intorno al triangolo* A B C *facciasi il rettangolo* A S P C, *e con gli asintoti* P S, P C, *pel punto* Q *descrivasi l'iperbola* Q A, *che necessariamente passerà per* A (*essendo il rettangolo* S D *uguale al* B C, *cioè al* D R, *ed aggiunto di comune* B C *riuscendo tutto lo* S C *uguale a tutto il* B R, *e però i punti* Q, A *essendo nella medesima iperbola, riguardante gli asintoti* S P R) *e similmente con gli asintoti* S A, S P *descrivasi per lo stesso punto* Q *l'iperbola* Q C, *che pure passerà* (*per la stessa ragione*) *per* C. *Dico, che l'applicate* D Q, H X, L V, E G *ec. sono le misure de' pesi assoluti* O, N, M, *ec. che pareggiano i momenti delle sezioni* D

B, H F, L I ec. *Imperocchè uguagliandosi i rettangoli, per esempio* A P, X P; *tolto di comune* H P, *sarà il rettangolo* S H *uguale al rettangolo* H Z, *onde* A H *ad* H C (*cioè per il precedente, il peso* N *al peso* O) *sarà come* X H *ad* H et, *cioè a* D B, *o pure a* D Q; *onde in dette linee* X H, D Q *sta la proporzione dei pesi* N, O; *e però l' iperbola descritta è la scala, che si cercava.*

Proposizione LXXXVIII. Teor. LVII.

Sia il prisma parabolico A B C (Fig. LXXXI.), *di cui la base rettangola* A G *sia parallela all' orizzonte, e sia sostenuto nell' estremità* A C; *e sia inteso segato con due piani paralleli* B D, E F *retti alla base. Dico, che i pesi assoluti* H, I, *che pareggiano i momenti delle resistenze* B D, E F, *sono tra loro, come le medesime sezioni* B D, E F, *o come l' altezze* B L, E M *delle medesime sezioni.*

Poichè immaginato un peso N *eguale ad* H, *ed appeso in* M F, *e presa la* M O *terza proporzionale delle* B L, E M; *essendo che il momento di* N *al momento di* H *sta, come il rettangolo* C M A *al rettangolo* C L A, *cioè* (*per la prop.* 84.) *come la linea* E M *alla* B L; *ed il*

momento di H *al momento di* I, *sta come il momento della resistenza* B D *al momento della resistenza* E F (*pareggiandole*) *cioè*, *come il quadrato dell' altezza* B L *al quadrato dell' altezza* E M (*per la prop.* 8.) *o pure come la prima* B L *alla terza* M O; *adunque per l' ugual proporzione*, *il momento di* N *al momento di* I *sta come la* E M *alla* M O, *cioè come la* B L *alla* E M; *ma il momento di* N *al momento* I *sta come il peso assoluto di* N *al peso assoluto di* I, *cioè come il peso assoluto di* H *al peso assoluto di* I; *adunque il peso assoluto di* H *al peso assoluto di* I *sta come* B L *ad* E M, *che sono l' altezze delle sezioni*, *o come la medesima sezione* B D *alla sezione* E F; *il che ec.*

Corollario. *Quindi è chiaro*, *che la scala de' pesi*, *che spezzano tal solido*, *sta nelle linee applicate parallele al diametro della stessa parabola* A B C.

Proposizione LXXXIX. Teor. LVIII.

Siano le due parabole A B D, C B D (Fig. LXXXII.) *sopra la stessa base* B D, *e con gli assi uguali* A D, C D *posti in dirittura*, *e sia la superficie* A B C *la faccia anteriore di un solido prismatico*, *che abbia l' opposta faccia simile*, *ed*

uguale alla stessa A B C; *il quale solido sia posato sopra il sostegno* D *posto nel mezzo della linea* A C; *ed i pesi* E, F *nell' estremità* A C *attaccati sieno tra di loro uguali, e pareggino la resistenza della sezione* B D. *Dico; che se lo stesso solido fosse altrove appoggiato, come in* G, *e che i pesi* I, L *posti nelle stesse estremità, e fra di loro equilibrati, pareggiassero la resistenza della sezione* G H, *sarebbe il peso* I *uguale al peso* E, *ovvero all' altro* F.

Imperocchè pareggiandosi da' pesi I, *ed* L *la resistenza della sezione* G H, *ed equilibrandosi nelle distanze* A G, G C, *sopra il sostegno* G, *secondo ciò che si è concluso nella prop.* 79. *lo stesso peso* I *pareggerebbe dal suo canto la resistenza della medesima sezione* G H, *quando la sola parte* H G A *sporgesse fuori del muro; ma il peso, da cui si pareggia in tale stato la resistenza della sezione* G H, *è il medesimo, ovvero è uguale a quello, che pareggerebbe la resistenza dell' altra sezione* B D, *quando* B D A *sporgesse fuori del muro, per la famosa proposizione del Galileo circa il prisma parabolico: ed allora lo stesso peso* E (*per la proposizione* 79.) *pareggerebbe la stessa resistenza* B D; *adunque il peso* I *è uguale al peso* E, *ovvero al peso* F. *Il che ec.*

Proposizione XC. Teorema LIX.

Poste le medesime cose, si dimostrerà, che l'aggregato de' pesi E, F, *i quali si equilibrano d'intorno al sostegno* D *colla resistenza* D B, *all'aggregato de' pesi* I, L, *i quali si equilibrano d'intorno ad un altro punto* G *colla resistenza* G H, *sta reciprocamente, come la parte maggiore* G C *alla* D C, *che è la metà di tutta la* A C.

Imperocchè per l'equilibrio starà L ad I, come A G a G C; e componendo, L ed I insieme sta ad I, come tutta la A C alla C G; ma I è uguale ad E, di cui il doppio sarebbe l'aggregato de' pesi E, F; dunque starà I al detto aggregato dei pesi E, F, come D C ad A C; e per l'ugualità perturbata, sarà l'aggregato dei pesi I, L, all'aggregato de' pesi E, F, come D C a C G; onde convertendo, è manifesta la verità di quanto si era proposto. Il che ec.

Corollario. Se intenderemo lo stesso solido appoggiarsi a' due sostegni posti nei termini A, C; è manifesto che il peso, il quale equilibrerebbe la resistenza B D, essendo appeso nel mezzo di A C in D, sarebbe uguale appunto a' due pesi E, F; ed il peso, che posto altrove, come in G

uguaglierebbe la resistenza G H, dovrebbe altresì pareggiare l'aggregato de' pesi I, L; per la qual cosa, il peso abile precisamente a rompere il detto solido in D, al peso che fusse sufficiente a romperlo in G, starà come C G a D C.

Proposizione XCI. Teor. LX.

Nel cuneo, o prisma triangolare A B H (Fig. LXXXIII.), *sostenuto in* A, B, *e segato per mezzo in* D, *ed altrove in* C; *il peso abile a spezzare in* C *al peso abile a spezzare in* D *sta, come la parte* B C *alla* C A.

Stendasi la sezione D G *in* E, *fino che l'altezza* D E *sia uguale alla* C F. *Dunque il peso abile a spezzare la sezione* C F *a quello, che è abile a spezzare l'ugual sezione* D E, *sta secondo il Galileo, come il rettangolo* B D A *al rettangolo* B C A, *ed il peso abile a spezzare la sezione* D E *a quello, che spezzerebbe la sezione* D G, *sta* (*per la prop.* 3.) *come il quadrato* D E, *cioè il* C F, *al quadrato* D G; *ovvero come il quadrato* B C *al quadrato* B D, *cioè al rettangolo* B D A; *dunque, per l'ugualità perturbata, il peso abile a spezzare la sezione* C F *a quello, che è abile a spezzare la* D G, *sta, come il quadrato* C B *al*

rettangolo B C A, *cioè come la* B C *alla* C A. *Il che ec.*

Corollario. Il peso abile a spezzare in C F al peso abile a spezzare in M L sta, come il rettangolo di B C in A M al rettangolo di A C in M B, ovvero è in ragione composta di B C ad A C, e di A M ad M B; perchè il peso equivalente alla sezione C F a quello, che equivale alla sezione M L, ha ragione composta dell' equivalente alla sezione F C all' equivalente alla D G, e di questo all' equivalente alla M L; ma la prima ragione è, come di B C ad A C, e la seconda è come di A M ad M B, per questa proposizione; dunque i pesi equivalenti alle sezioni C F, M L sono in ragione composta delle dette proporzioni; o pure sono come il rettangolo di B C in A M al rettangolo di A C in M B; il che ec.

Proposisione XCII. Teor. LXI.

Nel cuneo parabolico I B A (Fig. LXXXIV.) *il peso equivalente alla resistenza della sezione* C F *al peso equivalente alla resistenza della sezione* D G, *sta come il quadrato della media proporzionale* B H *tra* B C, *e* B D, *al rettangolo* B C A.

Si stenda D G in E, sicchè la sezione D E sia uguale, e di pari altezza alla

C F; dunque il peso equivalente alla sezione C F all' equivalente alla sezione D E sta reciprocamente, come il rettangolo B D A al rettangolo B C A; ma il peso equivalente alla D E a quello, che pareggerebbe la D G sta, come il momento della resistenza D E a quello della G D, cioè per la prop. 3. come il quadrato D E, ovvero C F, al quadrato D G, o pure come la C B alla B D, o come il rettangolo B C A al rettangolo di B D in C A; dunque per l' ugual proporzione il peso equivalente alla sezione C F all' equivalente alla D G sta, come il rettangolo B D A al rettangolo di B D in C A; cioè sta, come D A a C A; e quando il punto D fosse nel mezzo della retta B A (come tacitamente qui suppone il Viviani, in coerenza di ciò, che espressamente ha supposto nell' antecedente) sarà il primo peso al secondo, come B D a C A, o come C B D a B C A, o come il quadrato della B H, media tra B C, e B D, al detto rettangolo B C A; ma generalmente la proporzione del peso, che rompe in C a quello che rompe in D, è, come D A a C A, come si è mostrato; ed è per accidente, che essendo il punto D nel mezzo si possa in vece della D A prendere la D B, e cavarne la proporzione di sopra enunziata dal nostro Autore.

Proposizione XCIII. Quesito XXXII.

In questi solidi cuneiformi, ed in altri su questo andare, cercare le sezioni di minor resistenza, se ve ne sono; e quelle d'ugual resistenza, se in diversi punti vi si ritrovano.

Nel cuneo triangolare, e nel parabolico di sopra considerati non vi è altrimenti sezione alcuna, che dir si possa di minima resistenza; e nè meno due sezioni ugualmente resistenti assegnare si possono; essendo sempre le sezioni più vicine alla testata del cuneo di maggior resistenza, che le più vicine al taglio del medesimo; ed il simile avviene in qualsivoglia sorte di cuneo, che generato fusse da alcuna dell' infinite parabole, o iperbole riferite al suo diametro; siccome ancora ne' cunei semicircolari, o semiellittici, come con simile progresso si può dimostrare.

Proposizione XCIV. Teor. LXII.

Nell' emisfero, o emisferoide A B C (Fig. LXXXV.), *che sia col piano orizzontale sostenuto nell' estremità* A C, *si dimostrerà, che i pesi assoluti* H, I, *dai*

quali si pareggiano le resistenze delle sezioni B D, E F *rette al piano* A C, *e tra di loro parallele, sono, come l' altezze delle simili sezioni* B L, E M.

[illegible] *Poichè, prese le* M O, M G *continue proporzionali dopo le* B L, E M, *e considerato il peso* N *uguale ad* H *appeso in* M, *sarà il momento di* N *al momento di* H, *come il rettangolo* C M A *al rettangolo* C L A, *cioè come il quadrato* E M *al quadrato* B L (*nel mezzo cerchio, o mezza ellisse* A B C) *cioè come la linea* M O *alla* B L; *ed il momento di* H *al momento di* I *sta, come la resistenza della sezione* B D L *alla resistenza della sezione* E F M (*pareggiandole per ipotesi*) *cioè come il cubo* B L *al cubo* E M (*per la prop.* 4) *o pure come la prima* B L *alla quarta* M G; *adunque per l' ugual proporzione il momento di* N *al momento di* I *sta, come la* M O *alla* M G, *cioè come la* B L *alla* E M; *ma il momento di* N *al momento* I *sta come il peso assoluto di* N, *cioè come il peso assoluto* H *al peso assoluto* I; *adunque detti pesi sono come l' altezze delle sezioni corrispondenti. Il che ec.*

Proposizione XCV. Teorema LXIII.

Nel prisma parabolico, sostenuto come si vede in M, N (Fig. LXXXVI.), *pa-*

reggi il peso E *il momento di resistenza della sezione* A B, *e sia qualunque altra sezione* C D. *Dico, che un altro peso* F, *uguale all'* E, *pareggerà il momento di resistenza della sezione* C D; *cioè, che detto prisma è da per tutto di eguale resistenza.*

Poichè il momento di E *al momento di* F *sta, come il rettangolo* M I N *al rettangolo* M L N, *cioè come* G I *alla* H L (*mercè della parabola* M G H N,) *o pure come i loro doppi* G B, H D; *cioè, per la prop. 2. come il momento delle resistenze nelle sezioni* A B, C D; *e permutando il momento del peso* E *al momento della resistenza* A B *sta, come il momento del peso* F *al momento della resistenza* C D; *ma il momento* E *pareggia la resistenza* A B, *adunque anche il momento* F *pareggia la resistenza* C D; *e però questo prisma è ugualmente resistente per tutto. Il che era da dimostrarsi.*

È chiaro dal contesto, essere le figure M G N, M B N due parabole uguali fatte sopra la base comune M N, e colle cime rivoltate alla banda opposta; e che però il cuneo parabolico, di cui parla il Galileo, mostrandolo ugualmente resistente, quando si sporga fuori del muro a qualsivoglia lunghezza (quale sarebbe il solido I G H N P C A E, se il punto G fusse la cima della parabola M G N, ed il punto A dell'opposta Q A P, e se collocato fusse col

rettangolo E A G I orizzontale, e coll' altro E I N P stesse fitto nel muro verticale; e qual ancora sarebbe, raddoppiandolo il solido M G N P A Q similmente posto col rettangolo Q M N P nel muro, sicchè le rette Q M, P N fussero orizzontali) è un solido d' uguale resistenza ancora essendo sostenuto da ambi gli estremi, purchè si ponga in sito convenevole, cioè facendo giacere la parabola M G N nel piano orizzontale, sostenuto negli estremi della base della parabola M, N: o si pigli il solo Q G N P (che è un duplicato cuneo parabolico) o si raddoppi questo di nuovo, come ha fatto il Sig. Viviani, per maggiore stabilità, e vaghezza, nel solido prismatico G N B M Q O P A; sicchè è verissimo ciò che asserì il Galileo, potersi ne' travamenti delle navi levare un terzo di peso a tutte le travi, senza diminuirne la gagliardia; essendo il presente solido appunto due terzi del prisma rettangolo, che gli fusse circoscritto, e di cui tutte le sezioni fussero uguali alla A B. Onde questa speculazione del Sig. Viviani serve appunto a confutare la calunnia opposta al Galileo, prima da Monsù Blondello in Francia, e poi dal Sig. Marchetti in Italia, spacciando, ch' egli altamente s' ingannasse nel proporre che il suo solido parabolico fusse utile a praticarsi con risparmio di più di 33. per 100. senza dispendio di ro-

bustezza; il che sebbene non si verifica ne' solidi parabolici disposti come nelle prop. 88. 90. e 92. esaminati a tal fine dal nostro Autore, basta, che si dimostri vero nella presente situazione, che del pari è sufficiente a salvare il detto di quel grand'Uomo: oltre di che altre maniere non mancano da difenderlo in questo proposito, come si può vedere nella mia risposta Apologetica par. 1. cap. 7. n. 6. pag. 131. e seguenti.

Proposizione XCVI. Teor. LXIV.

Negli emicilindri di base circolare, o di base ellittica, come nelle figure si vede, sostenuti nell' estremità M, N (Fig. LXXXVII.). *Dico pure, che se il peso* E *pareggia la resistenza* A B, *anche il peso* F, *uguale ad* E, *pareggierà la resistenza* C D.

Perchè il momento di E *al momento di* F *sta come il rettangolo* M I N *al rettangolo* M L N *cioè come il quadrato* A G *al quadrato* C H (*per la natura del semicircolo, o della semiellisse*) *cioè come il momento di resistenza della sezione* A B, *al momento di resistenza della sezione* C D, *per la prop.* 3. *e permutando il momento di* E *al momento di resistenza della sezione* A B, *starà come il mo-*

mento di F *al momento della resistenza* C D; *dunque se i primi momenti si pareggiano, come vuole la supposizione, ancora i secondi saranno uguali, cioè il momento* F *pareggierà altresì la resistenza* C D. *Il che ec.*

Questi appunto sono i solidi d' uguale resistenza, trovati dal Blondello, e dal Marchetti, per surrogarsi al solido parabolico del Galileo, da essi creduto incapace di adattarsi a tale effetto; ma molto prima già inventati dal nostro Autore, oltre gli altri di simile proprietà.

Proposizione XCVII. Teor. LXV.

Ancora con un mezzo cerchio, e con una semiellisse, ovvero con due semiellissi di uguale diametro orizzontale, e di diverso diametro perpendicolare, si possono avere solidi, ch' essendo sostenuti ne' loro termini, siano d' uguale resistenza in riguardo ad un dato peso collocato in qualsivoglia punto interposto fra i suoi sostegni.

Questa proposizione è solo brevissimamente accennata con un semplice sbozzo, o piuttosto intrigo di linee, da cui nulla può ricavarsi; ma credo, che il vero sentimento dell'Autore sia il seguente.

Intendasi sopra la retta orizzontale M N (Fig. LXXXVIII.) l' ellisse M A N, ed

il semicircolo M B N; o pure le due ellissi diversamente alte, M A N, M B N; e si intendano alcuni prismi, o per parlare con maggiore proprietà, certe volte a mezza botte, fatti colla grossezza espressa dalle lunette M B N A M: sicchè la volta interiore abbia per centina la curva M B N, e la superiore si termini all' altra curva M A N: Dico, esser queste volte solidi nel loro massiccio da per tutto d' uguale resistenza; perchè se il peso E fosse abile a sforzare la grandezza A B, ed il peso F uguale ad E tirasse perpendicolarmente l' altra grossezza C D; essendo tanto il quadrato A G al quadrato C H, quanto il quadrato B G al quadrato D H, nella proporzione del rettangolo N G N al rettangolo M H N, sarà A G ad H C, come B G a D H; e permutando A G a G B, come C H a D H; e dividendo A B a B G, come C D a D H; e di nuovo permutando, A B a C D, come B G a D H; ed il quadrato A B al quadrato C D, (cioè, per la proposizione 3. il momento della resistenza A B al momento della resistenza C D) sarà come il quadrato B G al quadrato D H, ovvero come il rettangolo M G N al rettangolo M H N, cioè come il momento del peso E al momento dell' ugual peso F, secondo il Galileo; onde siccome il momento primo pareggia il terzo, così il secondo esser debbe uguale al quarto; cioè se il momento di resistenza della grossezza A B

è uguale al momento del peso E, altresì il momento di resistenza nella grossezza C D dee riuscire uguale al momento del peso F; e per tanto la volta da ambe le parti convessa, e concava-ellittico, o dall' una ellittico, e dall' altra circolare (purchè abbiano lo stesso asse traverso le due curvature) sarà da per tutto di uguale resistenza, in riguardo al medesimo peso, dovunque le si posi sul dosso, o venga sospeso da qualsivoglia punto della sua concavità. Il che ec.

Proposizione XCVIII. Teor. LXVI.

Se sarà la parabola A B C D E (Fig. LXXXIX.) *la cui base* A E, *l'asse* C F, *e d' intorno ad essa il rettangolo* G E, *in cui applicandosi le rette* I L, M N, O P, *parallele a* C F, *si ritrovino tra* I L, L Q *due medie* L S, L R; *e tra* M N, N B *due medie proporzionali* N V, N T; *e tra* O P, P D *due medie* P Z, P X; *e così sempre.* Dico, *che i punti* A S V C Z E *sono in una certa curva, la quale se si rivolterà d' intorno alla base* A E *descriverà un solido rotondo, che sarà da per tutto d' ugual resistenza, sostenendosi negli estremi* A, E.

Imperocchè il momento della resistenza nel cerchio descritto da C F, *al momento della resistenza nel cerchio de-*

scritto da V N, *sta come il cubo* C F *al cubo* V N (*per la 4 proposizione*) *cioè come il cubo* M N *al cubo* V N, *o come la prima* M N *alla quarta delle proporzionali* N B, *cioè come* C F *ad* N B, *le quali nella parabola sono, come il rettangolo* E F A *al rettangolo* E N A, *o come il momento di un dato peso, che posto in* F *bastasse a superare la resistenza di* C F, *al momento del medesimo peso posto in* N; *adunque il momento della resistenza* C F *al momento della resistenza* V N *è, come il momento di un peso in* F *al momento dello stesso peso in* N; *e permutando il momento della resistenza* C F *al momento del peso in* F *sta, come il momento della resistenza* V N *al momento del medesimo peso in* N; *onde siccome il momento della resistenza* C F *sarebbe pareggiato da un tal peso posto in* F, *ancora il momento della resistenza* V N *sarebbe uguagliato dallo stesso peso in* N, *che è quanto dire, che sarebbero uguali le resistenze del solido in qualsivoglia sezione* C F, V N. *Il che ec.*

La curva A V C Z E, da cui nasce questo solido rotondo di uguale resistenza, si chiama una ellisse cubica, per avere i cubi dell' ordinate C F, V N, proporzionali a' rettangoli A F E, A N E, fatti dalle parti del suo diametro A E.

Proposizione IC. Teor. LXVII.

La scala delle forze, o pesi da appendersi in diversi luoghi d'una leva, ed equivalenti ad una data invariabile resistenza posta nella contralleva, sta nelle linee parallele alla perpendicolare tirata dal sostegno sopra la leva, e terminata da qualunque iperbola, di cui le asintote siano la detta leva e la perpendicolare.

Sia la leva A B (Fig. LXL.) *sostenuta in* C, *e nell' estremo della contralleva* C A *sia la resistenza* D, *che da qualsivogliano punti* F, B *ec. sia equilibrata dagli equivalenti pesi, o forze* G, E; *e nell' angolo retto* B C H *sia descritta qualunque iperbola* L I, *di cui siano asintote le linee* C B, C H, *e dai punti* F, B *siano le* F I, B L, *parallele all' asintoto medesimo* C H. *Dico, che gli equivalenti* G, E *sono fra loro, come l' intercette* F I, B L.

Poichè essendo le forze G, *ed* E *equivalenti alla resistenza* D, *sarà* G *a* D, *come la distanza* A C *alla* C F; *e* D *ad* E, *come la* B C *alla* A C: *adunque per l' ugualità perturbata, come* G *ad* E, *così* B C *a* C F, *ovvero* F I *a* B L, *per essere il rettangolo* C B L *uguale al* C F I, *per la proprietà dell' iperbola; se dunque* F I *rappresenta la misura dell' equi-*

valente G, *la* B L *rappresenta l' equivalente* E, *e così tutte l' altre intercette; sicchè la scala di tali forze, o pesi equivalenti sta nelle dette intercette ec.*

Proposizione C. Teor. LXVIII.

La scala de' pesi d' ugual momento al momento variabile d' uno stesso peso nella leva, che successivamente muti centro, o sostegno, stante la medesima distanza de' contrappesi, è nelle parallele condotte dentro l' angolo asintotale della iperbola (ma però terminate fra la curva, ed una parallela all' asintoto.

Penda il peso I (Fig. LXLI.) dal punto D della libra D C, e con esso si equilibri il peso K, posto il sostegno in varj punti della detta libra, come in E, *e*. Pongasi perpendicolare a D C la E G, ovvero *e g* proporzionale al peso K, essendo D H proporzionale al peso I; sarà dunque D E ad E C, come K ad I, cioè come G E a D H; e per tutto il rettangolo E D H sarà uguale al rettangolo C E G; ed aggiunto di comune F E C, sarà il rettangolo H D C uguale al G F B; e però i punti D, G saranno nell' iperbola D G, che riguarda gli asintoti H B, B C; e similmente, posto il sostegno *e* oltre il punto D, e fatta la stessa costruzione, saranno uguali i rettangoli *e* D H, C *e g*; i

quali tolti di comune dallo stesso rettangolo C *e f*, rimarrà H D C uguale al *g f* B; ed i punti D, *g* nella stessa iperbola, fra l'angolo asintotale H B C, onde se D H rappresenta il peso I, le G E, *g e* terminate fra l'iperbola, e la D C parallela all'asintoto B H, rappresenteranno i contrappesi K equivalenti allo stesso I, posto che la libra D C sia sostenuta in qualsivoglia punto E, ovvero *e*; che però la scala di cotesti pesi sta nelle parallele condotte dentro l'angolo asintotale, ma determinate dalla iperbola, e dalla retta condotta parallela, ad uno degli asintoti; il che ec.

Proposizione CI. Teor. LXIX.

La scala de' momenti di tutte l'uguali linee A B, C D, E F (Fig. LXLII.) *intercette da linee parallele: o pure di tutti i piani* A B, C D, E F, *in un parallelepipedo prisma, o cilindro ec. sta fra le linee* B G, D H, F I, *nell'angolo rettilineo* F L I *intercette.*

Questo è chiaro, perchè le grandezze A B, C D, E F, essendo uguali, i momenti loro sono come le distanze dal sostegno, L B, L D, L F: e però ancora sono proporzionali all'ordinate del triangolo B G, D H, F I. Il che si dovea dimostrare.

Corollario I. Quindi ancora i momenti de' pesi, o cilindri uguali A B, C D (Fig. LXLIII.) *posti in varie lontananze, e contrappesati dallo stesso invariabile momento del peso* O, *crescono, come le parallele tirate sotto ad un angolo rettilineo.*

Corollario II. Se la cassa A B (Fig LXLIV.) *sarà piena d' acqua, e s' intenderà muoversi il diaframma* K B, *sempre parallelo a se stesso, si anderà abbassando l' acqua nel continuo slontanamento di esso diaframma; ed il momento del peso di tutta la detta acqua contro il momento dello stesso contrappeso* O, *anderà crescendo, come le linee parallele nel triangolo* B L G.

Perchè il peso dell'acqua sarà uguale, ed il suo momento sarà proporzionale alle distanze del suo centro di gravità dal sostegno L, ovvero come le loro duple, cioè come l' intere lunghezze L B, L D, o pure come l' ordinate B G, D H, nel detto triangolo. Il che ec.

Proposizione CII. Teor. LXX.

I momenti delle linee D E, F G, L M (Fig. LXLV.) *nel triangolo* A B C, *crescono, e scemano, come le linee* E H, G I, M O *nella parabola quadratica* A I O C, *la cui base* A C; *o pure sono,*

come i rettangoli D E A, F G A, L M A *ec.*

Perchè il momento di D E al momento di F G (posto il sostegno in A) è in ragione composta della D E alla F G; che è quanto dire di E C a G C, e della distanza E A alla distanza A G; ma di queste proporzioni si compone ancora la ragione del rettangolo A E C al rettangolo A G C; dunque il momento D E al momento F G sta, come il rettangolo A E C al rettangolo A G C, ovvero come le linee E H, G I condotte nella parabola parallele al diametro: ed essendo similmente la ragione de' rettangoli D E A, F G A, composta di quella delle distanze A E, A G, e di quella delle grandezze E D, G F, come appunto la ragione de' momenti suddetti: è chiaro, essere i detti momenti proporzionali ancora a que' rettangoli; il che ec.

Corollario. I. Se girando il triangolo B A C d' intorno il lato A B ne nascerà un cono, le superficie cilindriche descritte dalle linee D E, F G saranno altresì, come i rettangoli D E A, F G A; e però riusciranno, come i momenti delle suddette linee. Il che però è generale di tutte le figure A B C sostenute in A, convenendo a qualsivoglia specie di figura, l' essere i momenti delle ordinate alla base A C proporzionali a' rettangoli di dette ordinate nelle distanze dal sostegno; e conseguente-

mente alle superficie cilindriche generate da esse ordinate nel solido rotondo, che nasce rivolgendosi la figura d'intorno all'asse A B.

Corollario II. Lo stesso segue ne' momenti de' piani, o circoli D E, F G (Fig. LXLVI.) *nel conoide parabolico quadratico* A B C; *imperocchè questi piani crescono, e scemano proporzionalmente alle linee del triangolo suddetto* A B C; *e però sono detti momenti misurati dalle rette* E H, G I *parallele al diametro della parabola fatta sopra la base* A C.

Corollario III. Perchè poi la maggiore di tutte queste linee condotte nella parabola è il diametro, che corrisponde al mezzo della lunghezza del triangolo, o del conoide; quindi il massimo momento delle ordinate nel triangolo, o de' piani paralleli alla base di esso conoide è nel mezzo di tutta la lunghezza A C.

Proposizione CIII. Teor. LXXI.

La scala de' momenti di tutte le linee sottotese ad un angolo rettilineo (posto il sostegno nel detto angolo) sono, come le linee determinate dal trilineo parabolico.

Imperocchè i momenti delle linee C B, E F (Fig. LXLVII.) *sono come i qua-*

drati delle distanze B A, F A; *e però sono, come le rette* B D, F G *che ad esse corrispondono nel trilineo della parabola quadratica.*

Corollario. *Quindi i momenti de' rettangoli, de' prismi, de' cilindri, tirati fuori d' un muro; ed in somma di tutte le grandezze. che sono crescenti a misura delle distanze, crescono come le linee intercette dal detto trilineo della quadratica parabola.*

Proposizione CIV. Teor. LXXII.

I momenti delle grandezze, le quali crescono in ragione de' quadrati delle distanze, come sarebbero le linee intercette dal trilineo parabolico quadratico, B C, D E (Fig. LXLVIII.) *ovvero i cerchi* N C, M E *del cono* M A E, *ovvero i piani di una piramide ec. sono, come le linee* C F, E G *intercette dal trilineo parabolico cubico* E A G.

Perchè ne' momenti di tali grandezze, alla ragione di esse, la quale già si suppone duplicata di quella delle distanze, si aggiunge un' altra volta la ragione delle stesse distanze; onde si compone la ragione de' momenti B C, D E, ovvero N C, M E triplicata della ragione A C, A E, la quale è la stessa de' cubi A C, A E, cioè delle linee C F, E G nel trilineo

della parabola cubica; onde è manifesto ciò che era proposto da dimostrarsi.

Corollario. Quindi i momenti de' triangoli simili, e de' prismi triangolari, e de' conoidi parabolici cavati fuori d'un muro, sono proporzionali alle linee del medesimo trilineo della cubica parabola; essendo queste grandezze, che crescono come i quadrati delle loro distanze dal sostegno, a cui si appoggiano, come nelle prop. 74, e 76 fu dimostrato.

Proposizione CV. Teor. LXXIII.

I momenti delle grandezze crescenti in ragione de' cubi delle distanze, crescono come le linee intercette dal trilineo parabolico biquadratico.

La dimostrazione è simile alle precedenti: aggiungendosi sempre alla ragione delle grandezze quella delle distanze, per fare la ragione de' momenti; onde generalmente si può dire che se le grandezze crescono in qualche ragione moltiplicata di quella delle distanze, i momenti vengono ad augumentarsi in una ragione sempre un grado più alta; e però le grandezze essendo come i cubi, i momenti diventano, come i biquadrati delle distanze.

Corollario. I. *Quindi i momenti delle linee intercette nell' angolo cubico parabo-*

lico, crescono come le linee interposte al trilineo parabolico biquadratico.

Corollario II. *I momenti de' trilinei della parabola quadratica, ovvero i momenti de' coni, e piramidi simili, cavati fuori d'un muro, sono come le dette linee sottotese all' angolo, che fa la tangente della cima colla curva parabolica biquadratica (come nella prop. 72 si è veduto)*

Proposizione CVI. Teor. LXXIV.

I momenti dell' applicate D E, B C (Fig. 1c.) *nella parabola quadratica* A B D, *sono come i cubi delle medesime* D E, B C.

Imperocchè i detti momenti hanno ragione composta delle linee D E, B C, *e delle distanze* E A, C A, *o pure (per la natura della parabola quadratica) dei quadrati* D E, B C: *ma ancora il cubo* D E *al cubo* B C *ha la ragione composta di quella della linea* D E *alla* B C, *e di quella del quadrato* D E *al quadrato* B C; *dunque il momento della linea* D E *al momento della* B C *è, come il cubo* D E *al cubo* B C. *Il che si dovea dimostrare.*

Corollario I. *Perchè nella parabola quadratica il cubo* D E *al cubo* B C *sta, come la superficie* D A E *alla superficie*

B A C (*per la prop.* 62) *saranno i momenti delle dette ordinate proporzionali alle medesime superficie.*

Corollario II. *Che se* A B D E *sarà un conoide parabolico quadratico, i momenti de' cerchi* D E, B C *saranno, come i quadrati delle distanze* E A, C A *ec.*

Corollario III. *E se fusse* A B D E *la parabola cubica, sarebbero i momenti delle linee* D E, B C, *come il biquadrato* D E, *al biquadrato* B C *ec.*

Corollario IV. In tutte quelle figure piane, e solide, che dal Sig. Viviani nella prop. 61 si appellano di proporzionale aumento, cioè che al rettangolo, o cilindro, o prisma circoscritto hanno sempre una istessa determinata ragione, sempre si verifica, che i momenti dell'ordinate, o dei piani paralleli alla base, stando la figura appoggiata al sostegno nella sua cima, sono come le stesse parti della figura, che dalla cima restano tagliate dalle ordinate medesime, o da' piani paralleli alla base. Imperocchè queste porzioni di figure, come quelle che sono proporzionali a' rettangoli, o cilindri, o prismi circoscritti, sono in ragione composta di quella delle basi, e delle altezze, che sono le lontananze di dette basi dalla cima; ma ancora i momenti di esse basi, cioè delle rette, o piani paralleli, sono in ragione composta delle medesime; dunque sono proporzionali

i momenti di esse alle figure medesime tagliate dalla sua cima.

Corollario V. In tutte le suddette figure, essendo l' ordinate, o i piani paralleli proporzionali a qualsivoglia dignità delle distanze dalla cima; i momenti, che oltre la ragione delle grandezze importano un'altra volta le ragioni delle dette distanze, saranno proporzionali alle dignità di esse distanze, di un grado superiori, cioè denominate da un numero maggior di una unità di quello, da cui erano denominate le dignità delle distanze medesime, proporzionali alle ordinate, ovvero a' piani paralleli alla base nella figura, che sta appoggiata nella stessa sua cima.

Proposizione CVII. Teor. LXXV.

I momenti di tutte le linee C D, E F (Fig. c.) *nella parabola quadratica* A B G, *sostenuta su l' appoggio* A *corrispondente alla base* A B, *sono tra di loro, come i rettangoli* C D A, E F A *ec.*

Già ho avvisato nel coroll. 1 della proposizione 102 essere ciò generalmente vero in qualsivoglia genere di figura; onde non accade altra dimostrazione, bastando il discorso fatto in tale proposito nel luogo citato.

Corollario. *Perchè il massimo di tali rettangoli è* A H I, *dove la* A G *talmente resta divisa in* H, *che la* G A *sia sesquialtera di* A H; *dunque il massimo momento sarà quello dell' applicata* H I, *in distanza di due terzi dalla base* A B.

Che sia A H I (Fig. CI.) il maggiore di tutti i rettangoli iscritti nella parabola, essendo A G sesquialtera di A H, si prova così. Condotta per I la tangente K I L, sarà H L dupla di H G; e però sarà la stessa H L uguale ad A H, che supponevasi parimente dupla di H G; dunque il rettangolo A H I M è adattato alla metà della linea A L, mancando della figura I H L simile ad N D L, per cui mancherebbe qualunque altro rettangolo A D N applicato altrove alla stessa linea; e però, secondo Euclide, I H A M maggiore di qualunque A D N iscritto nello stesso triangolo K L A; ma A D N è maggiore di A D C iscritto nella parabola; dunque tanto più I H A M è maggiore di qualunque altro rettangolo A D C iscritto nella parabola colla larghezza A D minore, o maggiore di A H sopra determinata; per tanto il detto triangolo è il massimo di tutti; il che ec.

Proposizione CVIII. Teor. LXXVI.

I momenti de' piani C D, E F (Fig. CII.) *paralleli alla base* A B *nel solido rotondo parabolico cubico* A B G, *sostenuto in* A, *sono come i parallelepipedi, o prismi rettangoli, che abbiano per loro basi i quadrati* C D, E F, *e per altezze le distanze* A D, A F.

Ciò parimente si verifica in qualsivoglia solido rotondo, o piramidale, o prismatico, o d' altra maniera, che abbia per sezioni tante figure simili proporzionali ai quadrati de' diametri, o de' lati omologhi, come delle C D, E F (ed ancora quando non fussero figure simili, prendendo quadrati uguali, o proporzionali ad esse, e surrogandoli in vece de' quadrati C D, E F) alla proporzione de' quali aggiungendosi quella delle distanze A D, A F, si compone la ragione de' momenti di essi piani paralleli, uguale a quella de' parallelepidi, o prismi rettangoli, nella proposta del Viviani enunziati.

APPENDICE.

Questo è quanto si è trovato esistente nel fascetto de' fogli raccolti dal Viviani, per illustrare questa importante materia delle resistenze, sigillato col sigillo del Sereniss. Sig. Cardinale Leopoldo di Toscana, e fermato di propria mano di S. A. Reverendissima fin sotto il dì 2 Marzo 1667 ab Incarn. come raccontai nella mia risposta Apologetica parte 1 pag. 88. Nell' ordinare la quale opera, se io abbia gran fatica durato, non accade, che stia ad esagerarlo, che ben potrà il Lettore da se comprenderlo riflettendo, che si trattava di dare forma di libro ad una materia del tutto indigesta, ed abbandonata affatto dal proprio Autore, il quale, disperando di potere aver ozio sufficiente a perfezionarla, sol tanto a fine di autenticare la verità d'aver egli un tempo fa intrapresa cotal fatica, ne raccolse in fretta, e senza scelta, ed ordine veruno le cartucce, nelle quali si trovava di avere disteso alcuna cosa a tal materia attenente, e fecele dal suddetto Principe sigillare.

Come che non erano le proposizioni disposte col metodo convenevole, io le ho ridotte a quello, che ho creduto essere il migliore, e che rendeva le proposizioni

più tra di loro connesse, e dipendenti l'una dall'altra, con passare dalle cose più semplici alle più composte. Le proposizioni meccaniche attenenti a' momenti di varj pesi, disposti diversamente in varie libre, erano dall'Autore distinte con nome di *Lemmi*; ma io, ad imitazione d'altri Matematici, le ho ridotte in ordine di Proposizioni; e solamente alcune Proposte sono state da me chiamate *Quesiti*, perchè corrispondevano ad alcune Proposte, nelle quali l'Autore non avea per anco determinata la sua sentenza, ma solo proponeva d'investigare ciò che si dovesse tenere; e l'altre indifferentemente le ho volute nominare *Teoremi*. In molte cose mi è convenuto farla più da Indovino, che da Geometra, per essere solo toccate in iscorcio le proposte, e con maniera alquanto oscura, come accade nelle cose, che notiamo per un semplice nostro ricordo, senza mettersi in pena, che possono essere intese da altri; nel che se non avrò sempre felicemente incontrato il vero sentimento dell'Autore, sarò degno di qualche compatimento. Io posso attestare con tutta sincerità d'avere sempre addotte fedelmente le sue parole, non alterandole giammai, se non molto di rado, in qualche minuzia, per rendere più chiaro, e compiuto il senso della proposta: è ben vero, ch'essendo alcune proposizioni distese in toscano, ed altre in latino (anzi taluna mezza nell'uno,

e mezza nell' altro idioma) ho stimato bene il darle tutte con uniforme stile nella nostra favella distese, senza però mai dipartirmi dal sentimento dell' Autore, e dal metodo di dimostrare da lui usato: come si può tuttavia riscontrare nell' originale: avendo a bella posta citate sempre le pagine del M. S. dove corrispondono le proposizioni di esso da me riferite; ed avendo ancora distinto il testo di lui da ciò, che di mio vi ho aggiunto per illustrarlo; acciocchè niuno possa prendere sbaglio in attribuire a me le profonde speculazioni da esso ritrovate, o viceversa in ascrivere a lui que' difetti, che per avventura mi saranno scorsi dalla penna. Se avesse potuto l' Autore medesimo perfezionare quest' opera, non vi ha dubbio, che l' averemmo assai più compiuta, e stesa a cose di maggiore rilievo, che non si è potuto fare dalla mia debolezza: e sopra tutto, alcune definizioni, ed alcune proposizioni, le quali ora ci pajono superflue, o non attenenti alla materia delle Resistenze, e sono come semi d'altre profonde ricerche, rimasi sterili, e senza frutto, perchè abbandonati dalla cultura di chi li piantò, allora non ci comparirebbero tanto inutili, ed inopportune al nostro proposito, ma fecondissime si troverebbero di nuove importantissime verità. Comunque sia, gradisca il Lettore queste poche notizie ripescate, alla meglio che si è potuto, dall' oblivione, in

cui giaciute sarebbero, se l' attenta cura di chi presiede alla nuova edizione dell' opere del Galileo, non rifletteva ad eseguire almeno in parte l' idea, che già ebbe il Sig. Viviani, d' arricchirle co' suoi pensieri a tal fine insieme raccolti.

E perchè nella mia risposta Apologetica parte 1 cap. 7 n. 11 oltre i solidi di uguale resistenza ritrovati dal nostro Autore, nelle prop. 48 53 55 57 58 59 60 63 95 96 97 98 ho dimostrato, come ritrovare si possano infiniti solidi d' uguale resistenza, sì nel caso, che da una parte sola siano fitti nel muro, e sì quando vengano retti in ambidue gli estremi: e tanto prescindendo dal proprio loro peso, quanto computandolo; ed ancora paragonando tra di loro, non già le parti di un medesimo solido, ma più, e diversi solidi dello stesso nome (come fa il Viviani nelle prop. 67 e 68) stimo bene di soggiungere qui tradotti dal latino i problemi da me nel citato luogo spiegati, acciocchè servano di corteggio alle suddette proposizioni del nostro Autore, le quali in queste proposte si confermano, e si ampliano a più universale applicazione, con gran vantaggio della pratica, di cui in oggi si suole far tanto caso nelle ricerche della meccanica.

Tutto l' artifizio ivi esposto consiste nel considerare le sue figure, dalle quali può intendersi generato un solido: cioè quella, che esprime il suo profilo, e quella

che gli serve di pianta; come per cagione d'esempio, nel cuneo parabolico I A B N (Fig. CIII.) si vede che nasce dalla parabola verticale I F B A, e dal rettangolo orizzontale B A K, moltiplicandosi le ordinate A I, C F della prima figura, che mostra il profilo del solido coll' ordinate A K, R C della seconda, che gli serve di pianta, onde ne provengono i rettangoli I A K N, F C R M, che sono le varie sezioni del solido: ed essendo data o la verticale figura del profilo, o l' orizzontale della pianta, si dimostra come geometricamente possa determinarsi l' altra, in maniera tale, che da ambidue ne nasca un solido di uguale resistenza, secondo le condizioni, che si ricercano; sicchè potendosi variare in infinito qualsivoglia delle due figure generatrici, a cui possiamo per avventura essere obbligati, o dalla materia stessa, che ce la porga bell' e fatta, o dal luogo, che non sia comodamente capace d' altra figura, o dall' arbitrio di chi voglia il solido di un tale determinato contorno, è manifesto, che infiniti solidi d' uguale resistenza si potranno assegnare: per non dir nulla, che quanto qui si dice de' solidi, le di cui sezioni sono tanti rettangoli, agevolmente applicare si potrebbe a' corpi, le sezioni de' quali fussero tanti rettangoli, o tante parabole di qualsivoglia grado, o tante ellissi, o in somma tali omogenee figure, che più ci piacciano, purchè sieno proporzionali a' rettangoli circoscritti.

Problema I.

Data la figura orizzontale A F *b* B (Fig. CIV.) d'una trave, che debba impegnarsi nel muro col suo termine A, ritrovare la figura verticale A E G B, da combinarsi coll'altra, perchè ne risulti un solido d'uguale resistenza, in riguardo al peso da attaccarsi al termine B di esso.

Condotta la linea B F, e tirando qualsivoglia ordinata D L all'asse A B, che seghi F B in M, si faccia, come D L ad L M, così il quadrato di qualunque data linea A E, al quadrato d'un' altra G L, ordinata al medesimo asse nel punto L parallela ad A E. Dico, che i punti E, G saranno nella nuova curva E G C, corrispondente all'effetto, che si desidera. Imperocchè la ragione di A F ad L M (cioè della lunghezza A B ad L B) sarà composta delle ragioni di A F ad L D, e di L D ad L M, cioè del quadrato A E al quadrato L G; per la qual cosa, se si compiranno i rettangoli F A E, D L G, e così gli altri in simigliante maniera ritrovati, fin tanto che se ne faccia un solido, che abbia per base la data figura A F *b* B, e per profilo verticale l'altra A E G C B ora determinata: questo sarà tale, che i momenti delle resistenze nelle sue varie

sezioni (essendo in ragione composta delle basi A F, L D, e de' quadrati dell'altezze A E, L G) saranno proporzionali alle lunghezze tagliate dal suo termine B; cioè a' momenti di un medesimo peso ivi attaccato: e però sarà di uguale resistenza il solido, o si appoggi nel taglio del muro sopra l' ordinata A F, o sopra l' ordinata L D della data base orizzontale. Il che ec.

Corollario I. Se la base A F *b* (Fig. cv.) sarà un rettangolo, cioè se l' ordinata A F sarà da per tutto uguale alla L D, sarà il quadrato E A al quadrato G L, come F A ad L M; ovvero come A B a B L; E però la curva E G B sarà una parabola, il cui asse B A, ed il solido quindi prodotto è il cuneo, o prisma parabolico già considerato dal Galileo.

Corollario II. Se F B A (Fig. cvi.) fusse un triangolo, sarebbe D L uguale ad L M; e però ancora il quadrato E A uguaglierebbe il quadrato L G: sicchè la faccia verticale sarebbe un rettangolo; ed il solido quindi nato diventerebbe il cuneo triangolare già ritrovato dal Sig. Viviani prop. 48.

Corollario III. Ma quando F B A (Fig. cvii.) fosse una parabola cubica, sarebbe la ragione di F A a D L suttriplicata della ragione di A B a B L, o di F A ad L M; onde quella di D L ad L M sarebbe duplicata di quella di F A a D L, ma la stessa, per costruzione, deb-

b' essere duplicata di A E ad L G (dovendo corrispondere a' quadrati loro) adunque la ragione di A F a D L, sarà la stessa con quella di A E ad L G; onde ancora la curva E G B sarà una parabola cubica; ed il solido fatto da' quadrati delle sue ordinate, o il conoide generato da cotal figura nel rivoltarsi d' intorno al suo asse, come composto di cerchi nati dall' applicate, e proporzionali a' detti quadrati, sarà d' una uguale resistenza, come notò il Sig. Viviani alla prop. 53.

Corollario IV. Generalmente, se la data figura sarà qualunque dell' infinite parabole, o iperbole, le di cui ordinate y si riferiscano a qualsivoglia potestà delle porzioni tagliate dall'asse x, secondo l' universale equazione $y = x\ m$ (dinotando m qualunque esponente positivo, o negativo, intiero, o rotto) La natura dell' altra curva ricercata sarà tale, che la sua ordinata z dovrà riferitsi alle potestà delle medesime x tagliate dalla cima dell' asse, l'esponente delle quali potestà sia la metà dell' eccesso di 1 sopra m; cioè, che la sua equazione sarà $z = x^{\frac{1-m}{2}}$ Di maniera che la curva cercata sarà parimente qualche specie di parabola, qualunque volta il detto esponente riesca positivo (cioè quando m è minore dell' unità, sicchè possa da essa sottrarsi) ma negli altri casi sarà qualche razza d' iperbola, rimanendo l' indice

negativo (quando non rimanga nullo, il che darebbe l' ordinate tutte uguali, come nel caso del rettangolo ritrovato nel corollario 2.) col sottrarsi il numero maggiore *m* dalla detta unità: ciò che sempre accade, quando la data curva è un trilineo parabolico, in cui le applicate si riferiscono alle porzioni della tangente verticale.

Corollario V. Se la data curva F D B fusse un quarto d' ellisse, o di circolo, ne verrebbe la curva cercata E G B di tale natura, che la porzione dell' asse B L al doppio di B A sarebbe come il biquadrato dell' ordinata G L alla somma de' biquadrati d' ambidue le G L, E A.

Problema II.

Dato il profilo verticale della curva E C B (Fig. CIV.), ritrovare l' altra figura, che aver debbe la base orizzontale, per ottenere lo stesso effetto.

Si faccia qualunque triangolo B A F; indi, come il quadrato G L al quadrato E A, così stia la retta L M intercetta nel detto triangolo, alla retta L D, che questa sarà una dell' ordinate alla curva, che si cerca; e nella stessa maniera si troveranno tutte l' altre: come è chiaro per lo converso della precedente costruzione. O pure, congiunta la B E, che sega in H l' ordinata

G L, si faccia, come il quadrato G L al rettangolo di A E in H L, così A F ad L D; e sarà similmente il punto D nella curva F D B ricercata; mercecchè questa costruzione confronta appunto con quella di sopra.

Corollario I. Quindi ancora si potrà dedurre la stessa costruzione de' solidi ritrovati dal Galileo e dal Viviani, secondo che vorrà supporsi la data figura verticale, o una parabola, o un rettangolo, o una parabola cubica, imperocchè l' altra figura orizzontale riuscirà respettivamente un rettangolo, o un triangolo, o una simile cubica parabola.

Corollario II. Che se la figura A E G B (Fig. CVIII.) fusse un triangolo, l'altra F D *b* sarebbe una iperbola tra gli asintoti A B *b*; imperocchè essendo G L uguale ad H L, sarà il quadrato G L al quadrato A E, come il quadrato L M al quadrato A F; e per tanto essendo nella stessa ragione L M, ad L D saranno L M, A F, L D continuamente proporzionali; cioè L D ad A F, come A F ad L M, o come A B a B L (o ancora come A E a G L) per la qual cosa il rettangolo D L B sarà uguale al rettangolo F A B, come richiede la natura dell' iperbola; ed oltre a ciò non solamente le sezioni del solido, che ne risulta, sarebbero d' uguale resistenza, ma sarebbero uguali di spa-

zio, per essere i rettangoli A E F, L G D tra di loro uguali.

Corollario III. Se la data curva è un quarto di cerchio, o d'ellisse, l'altra F D *b* (Fig. cix.) diventa una iperbola toccata in F dalla retta F B, di cui un asintoto sarebbe la retta A B, l'altro sarebbe K I perpendicolare ad A B nella distanza A I uguale ad A B, sicchè il centro d'essa sarebbe oltre il punto A nella B A altrettanto prolungata.

Corollario IV. Se fusse la proposta curva (Fig. cx.) E G B una iperbola, con la cima in B, e l'asse B A, ancora la curva F D *b* sarebbe iperbola, di cui un asintoto A B, l'altro I K distante dal punto B per tutta la quantità del lato trasverso della detta iperbola E G B. Di maniera che il centro I di questa nuova curva F D *b* caderebbe nella cima dell'iperbola opposta alla data E G B.

Corollario V. Se finalmente la data curva E G B sarà qualunque dell'infinite parabole, o iperbole riferite all'asintoto, ancora la curva, che si cerca sarà iperbolica, o parabolica, come nel simile corollario 4. della precedente si è veduto.

Problema III.

Data la figura orizzontale A F *b* B (Fig. CIV.) d'una trave da appoggiarsi a due sostegni ne' suoi termini A B: ritrovare la figura verticale A E G B, che combinata coll'altra, faccia un solido ugualmente resistente da per tutto, dovunque si ponga un dato peso, che lo aggravi ne' punti di mezzo a' suoi estremi.

Si faccia, come la D L a qualunque data A F, così il rettangolo A L B al quadrato L G. Sarà il punto G nella curva che si cerca, la quale soddisfarà al quesito. Imperocchè il prodotto degli estremi, cioè del quadrato L G nella D L (il quale prodotto è proporzionale al momento di resistenza nella sezione L D G, per essere in ragione composta del quadrato dell'altezza L G, e della base L D) uguaglierà il prodotto de' mezzani, cioè della costante A F nel rettangolo A L B (il quale secondo il Galileo è proporzionale al momento d'un dato peso espresso per la costante A F, ed applicato nel punto L al vette A B) adunque il peso precisamente bastante a spezzare il solido in una di dette sezioni, è bastante altresì a romperlo in qualunquè altra dovunque resti applicato; e non potendo vincere la resistenza d'una

di tali sezioni, nè meno sarebbe abile a vincerne verun' altra. Il che ec.

Corollario I. Se la base A F *b* B (Fig. CXI.) sarà rettangola, averà qualunque ordinata L D la stessa ragione alla costante A F; onde il rettangolo A L B al quadrato L G avrà altresì una medesima data ragione; e però la figura verticale A G B sarà un circolo, o un' ellisse, sicchè quindi ne nascerà il prisma semicircolare, o semiellittico trovato prima dal Viviani nella prop. 106. e poi dal Blondello, e dal Marchetti, e quindi da altri moderni osservato.

Corollario II. E se la data curva orizzontale fusse una parabola A D B (Fig. CXII.) descritta sopra la base A B, essendo l' applicate D L parallele all' asse, proporzionali a' rettangoli A L B, sarà la ragione della D L alla costante A F, uguale alla ragione del rettangolo A L B ad un costante quadrato G L; sicchè la figura verticale A E C B sarà un rettangolo d' una data altezza; e però il solido quindi generato, sarà il prisma parabolico dal Sig. Viviani nella prop. 95. e poscia dal Blondello, e da altri moderni avvertito.

Corollario III. Se A D B (Fig. CXIII.) fusse una ellisse di tal natura, che il cubo dell' ordinata D L fusse proporzionale al rettangolo delle parti del diametro A L B, o uguale al solido, che avesse per base il detto rettangolo, e per altezza la costante

A F, come suo lato retto: allora sarebbe L D ad A F, come il rettangolo A L B al quadrato L D; ma per costruzione è altresì il rettangolo A L B al quadrato L G, nella stessa ragione di L D ad A F; dunque il quadrato L G sarebbe uguale ad L D; e però la curva verticale A G B sarebbe la stessa di specie, e di numero, colla data orizzontale A D B, onde il solido quindi nato averebbe nelle sue sezioni tanti quadrati dell'ordinate L D; e conseguentemente, girando la detta ellisse cubica A D B intorno l'asse A B, produrrebbe un solido rotondo, le cui sezioni essendo i cerchi fatti dall'applicate L D proporzionali a' suddetti quadrati, si averebbe una sferoide d'uguale resistenza, come osservò, prima d'ogn'altro, il Sig. Viviani alla proposizione 98.

Corollario IV. Se la data figura orizzontale fusse il triangolo A F B, (Fig. CXIV.) la verticale sarebbe una parabola A *b* descritta coll'asse A B; imperocchè L D ad A F è come B L ad A B, ovvero come il rettangolo A L B al rettangolo L A B; e nella stessa ragione dovendo essere il rettangolo A L B al quadrato L G, sarà questo uguale al rettangolo L A B; di maniera che B A sarebbe il lato retto di questa parabola A G *b*. Onde si ha un'altra nuova specie di solido parabolico d'uguale resistenza, ancora quando è sostenu-

to da ambi gli estremi: e si potrebbe ancora utilmente adattare a maniera di cupola, retta sopra un pilastro di mezzo sottoposto al centro B, ed intorno in tutto il suo giro appoggiata ne' lati d'un poligono F f, che facessero il recinto d'un edifizio rotondo.

Corollario V. Generalmente, se la curva orizzontale sarà qualunque dell'infinite parabole, o iperbole riferite all'asintoto A B, di maniera che l'ordinate di essa corrispondano alle potestà delle porzioni dell'asse, indicate dall'esponente m, sempre la verticale figura sarà una specie di ellisse, in cui i quadrati dell'ordinate sieno, come il prodotto da un segmento del diametro nella potestà del residuo, indicata dall'eccesso dell'unità sopra l'esponente m; cioè da $1 - m$.

Problema IV.

Data la curva verticale A E G B, (Fig. CIV.) ritrovare viceversa l'orizzontale A F D B atta al medesimo effetto.

Si faccia, come il quadrato dell'ordinata G L al rettangolo de' segmenti della base A L B, così una retta costante A F, scelta ad arbitrio, all'ordinata L D. Sarà il punto D nella curva, che si cerca; co-

me è manifesto per la costruzione della precedente.

Corollario I. Facil cosa è il dedurre ancora di qui gli stessi solidi d'eguale resistenza determinati dal Viviani, e dagli altri, e da noi nella precedente; perchè supponendo essere la curva verticale un semicircolo, o semiellisse, si ha subito nell'orizzontale il rettangolo: e supponendo ivi il rettangolo, qui si ha la parabola ordinaria descritta sopra la base A B; e se ivi si ha l'ellisse cubica, qui nasce la stessa specie di figura; e se ivi si mette la parabola adiacente all'asse A B, qui nasce il triangolo ec.

Corollario II. Se la data E G B (Fig. CXV.) fusse un triangolo, l'altra F A D *b* sarebbe una iperbola, il cui asintoto sarebbe la retta C B, ed essa curva passerebbe per lo punto A, ed il centro C sarebbe sopra il punto B d'un intervallo dato B C, quarto proporzionale dopo i quadrati A E, A B, e la retta A F.

Corollario III. Ma essendo E G B qualunque dell'infinite parabole, o iperbole, in cui le potestà dell'ordinate, che hanno per esponente il numero *m* sieno proporzionali alle parti dell'asse tagliate dalla cima B, sarà la curva orizzontale ricercata una tale specie d'ellisse, le di cui ordinate sieno come i prodotti dall'una delle parti dell'asse nella potestà della rima-

nente, indicata dall' eccesso dell' unità sopra il duplo di *m*, cioè da 1 — 2 *m*.

Problema V.

Se ad una trave, che sporga in fuori da una parte, si dovesse soprapporre qualche solido prismatico, o cilindrico, o vi si dovesse alzare sopra una parete d' uguale grossezza, ed altezza da per tutto; ritrovare infinite figure, secondo le quali segando la detta trave, riesca in qualunque suo punto egualmente gagliarda, e forte, per reggere il peso soprapposto.

Si proponga ad arbitrio l' una, o l' altra delle due figure E D B (Fig. CIV.) orizzontale, ovvero E G B verticale, che per trovare l' altra basta discorrere così. I momenti de' pesi delle grandezze prismatiche, corrispondenti alle lunghezze A B, L B; sono per la prop. 3. del Galileo (o per la 20. del Viviani, o per lo corollario della prop. 103. del medesimo) come i quadrati di tali lunghezze. Bisogna dunque, che ancora i momenti delle resistenze nelle varie sezioni d' un solido, i quali sono come il prodotto della base nel quadrato dell' altezza, sieno proporzionali a' quadrati delle lunghezze. Si faccia pertanto, come il quadrato dell' ordinata verticale G L al quadrato della porzione dell' asse L B,

così una retta costante A F ad L D: che questa sarà la corrispondente ordinata nella figura orizzontale. O pure viceversa, come L D ad A F, così stia il quadrato di B L al quadrato di L G; che sarà questa l'ordinata nella figura verticale. Imperocchè il prodotto della base L D nel quadrato dell'altezza L G sarà in vigore di questa costruzione uguale al prodotto della costante A F nel quadrato di L B; e però sarà proporzionale al detto quadrato: onde essendo i momenti delle resistenze proporzionali a' momenti de' pesi sovrapposti; se tutto il peso non romperà tutto il solido nella sezione E A F impegnata nel muro; nè meno la porzione del peso corrispondente alla sola lunghezza L B, sarà abile a romperlo nella sezione G L D; che però tutto il solido sarà in questo senso da per tutto ugualmente resistente. Il che ec.

Corollario I. Se A F D B (Fig. CXVI.) sarà un rettangolo, sarà A E G B un triangolo, onde ne nascerà il prisma triangolare, proposto già per tale effetto dal Sig. Leibnizio negli atti di Lipsia del 1684. e da Monsù Varignon nelle memorie dell'Accademia di Parigi del 1702. art. 17. essendo il quadrato L D uguale, o in una data ragione, al quadrato dell'arbitraria A F, e però ancora il quadrato B L, riuscendo uguale, o in una costante ragione, al quadrato L G.

Corollario II. Ma se sarà A E C B

(Fig. cxvii.) un rettangolo, ne verrà A F D B un trilineo parabolico adiacente alla tangente verticale A B; e raddoppiando la figura A F D B d' intorno la retta B A, si averà un cuneo parabolico assai vago, ed opportuno all' effetto bramato.

Corollario III. Se la figura orizzontale sarà un triangolo A F B, (Fig. cxviii.) la verticale sarà una parabola d' intorno l' asse A B, onde ne nasce il solido A F H B, quale si dimostra nella figura.

Corollario IV. Se la verticale sarà un quadro di cerchio, o di ellisse E G B (Fig. cxix.) l' orizzontale B D F diventa una iperbola, il di cui asintoto N E parallelo ad A B, ma distante da esso per un dato intervallo, uguale alla costante A F.

Corollario V. Se l' una, e l' altra di queste figure sarà una parabola cubica, (Fig. cxx.) del secondo ordine, in cui i cubi dall' ordinate corrispondono a' quadrati delle porzioni dell' asse, ancora l' altra sarà della stessa natura; di maniera che un solido fatto da' quadrati di cotale parabola, o piuttosto un solido rotondo fatto da' cerchi, generati dall' ordinate nel rivolgersi la figura d' intorno al suo asse, (tagliandolo per mezzo, per ispianarne il dosso di sopra, ad effetto di adattarvi il peso da soprapporvi) sarà di uguale resistenza, come mostra la figura.

Corollario VI. Generalmente se la curva orizzontale sarà alcuna delle parabole,

o iperbole infinita, le cui ordinate siano, come le potestà denominate da m appartenenti alle porzioni dell' asse; la curva verticale averà i quadrati dell' ordinate proporzionali alle potestà indicate dall' eccesso di 2 sopra m, cioè da $2-m$, e considerate nelle porzioni dell' asse.

Corollario VII. Ma quando la figura verticale fosse una di cotali curve paraboliche, o iperboliche, in cui l' ordinate corrispondessero alle potestà dell' asse denominate da m; l' ordinate nella curva orizzontale corrisponderebbero alle potestà delle porzioni dell' asse, denominate dall' eccesso di 2 sopra il doppio di m, cioè da $2-2m$.

Problema VI.

Ritrovare infiniti solidi, i quali essendo in uno de' suoi termini impegnati nel muro, siano d' uguale resistenza in riguardo del proprio peso di essi.

Si prenda per curva verticale il trilineo parabolico, che serve di compimento all' ordinaria parabola, cioè le di cui ordinate si applicano alla tangente della cima; e per la figura orizzontale si pigli un rettangolo, o pure un triangolo, o ancora qualsivoglia dell' infinite parabole, che abbiano la medesima cima, e le di cui ordi-

nate siano come le potestà delle porzioni dell' asse, denominate da qualunque numero m. Dico, che il solido risultante dall' una, e dall' altra delle dette figure sarà tale, che in riguardo al proprio suo peso, sarà da per tutto d' una eguale resistenza: di maniera che, se tutto non potrà rompersi nella sezione aderente al muro, nè meno veruna porzione, in vigore del proprio peso, potrà staccarsi da qualunque sezione parallela al muro, quando pure in essa fusse il solido sostenuto. Imperocchè cotali solidi sempre saranno al solido prismatico circoscritto nella stessa ragione (qualunque porzione d' essa voglia considerarsi) cioè in quella di 1 ad $m + 3$; e la distanza del centro di gravità di questi solidi, e di ciascuna porzione loro, dalla base, è sempre proporzionale alla lunghezza dell' asse in proporzione di $m + 2$ a' $2m + 5$ (se non che nel caso del rettangolo orizzontale, essendo $m = 0$, la ragione di 1 ad $m + 3$ rimane solamente di 1 a 3, e da quella di $m + 2$ a' $2m + 5$, resta di 2 a 5.) E per tanto il momento di qualunque porzione d' un tale solido sarà sempre come il prodotto $y\,z\,x\,x$ (esprimendo y l' altezza verticale della sezione, z la sua base, e x la porzione dell' asse) imperocchè il peso del solido è proporzionale al prisma circoscritto $y\,z\,x$, e la distanza del centro di gravità dal sostegno di nuovo è proporzionata ad x. Ma

il momento della resistenza di qualsivoglia sezione è proporzionale al prodotto del quadrato dell' altezza nella sua base, cioè a' $y\,y\,z$; ed è y proporzionale ad $x\,x$, per essere la verticale figura un trilineo parabolico, onde $y\,y\,z$ è eguale a' $y\,z\,x\,x$; adunque il momento del peso di qualunque porzione di cotal solido, stesa oltre la sua base, è proporzionale al momento di resistenza della base medesima; e però ugualmente da per tutto è gagliardo il solido in riguardo del proprio peso; il che ec.

Corollario I. Se la figura orizzontale sarà il rettangolo, nè verrà un cuneo parabolico, quale fu considerato nella prop. 55. proposto ancora dal Leibnizio, e dal Varignon ne' luoghi citati.

Corollario II. Se l' esponente m è uguale a' 2 la figura orizzontale riesce un altro uguale trilineo parabolico: sicchè il solido fatto dall' applicate di questo spazio, e però ancora la tromba parabolica, nata dal ravvolgimento dello stesso trilineo intorno la tangente verticale, di cui parlano i suddetti Autori, e da noi fu trattato nella prop. 57. del Sig. Viviani, sarà di uguale resistenza, essendo composta da' cerchi generati dall' applicate, proporzionali a' detti quadrati.

Corollario III. In luogo dell' infinite parabole, si potrebbero a tale proposito adattare infinite iperbole, paragonando i solidi, che quindi nascono, a' prismi iscrit-

ti, in vece de' circoscritti; militando in questi ugualmente, che in quelli, la ragione medesima.

Corollario IV. Un altro prisma d'uguale resistenza, e d'una data altezza, si potrebbe assegnare, che avesse per base lo spazio logaritmico, imperocchè essendo gli spazj tra la curva logaritmica, ed il suo asintoto interposti, tra di loro, come l'ordinate (per ciò, che dimostrai negli Ugeniani capo 3. n. 7.) ed essendo i centri di gravità d'essi spazj, sempre distanti dalla base per lo stesso intervallo della suttangente (come ivi dimostrai cap. 11. n. 1.) i momenti de' pesi ne' prismi, eretti ad una data altezza sopra di essi spazj, e sostenuti sopra qualunque loro ordinata, saranno come le stesse ordinate; ma ancora i momenti delle resistenze nelle sezioni della medesima altezza sono come le basi (per la prop. 2.) cioè, come le dette ordinate; saranno adunque proporzionali i momenti de' pesi a' momenti delle resistenze; onde cotali prismi riusciranno d'uguale resistenza, come già si è avvertito alla pag. 58. del Sig. Viviani.

Problema VII.

Ad una data lunghezza A L (Fig. cxxi.) applicare infiniti solidi prismatici, o cilindrici, i quali in riguardo allo stesso peso pendente da un termine di essi (quando nell' altro solamente siano sostenuti i solidi) o pure applicato nel mezzo della lunghezza loro (in caso che si appoggino a' sostegni posti in ambi gli estremi) abbiano una resistenza uguale a quella di un dato prisma, o cilindro, la di cui lunghezza sia A E, l' altezza A F, e la lunghezza F G.

Si faccia, come A E ad A L, così F G ad F D; e per lo punto D, fra gli asintoti E A F, s' intenda descritta l' iperbola quadratica D C, in cui l' ordinate F D, B C siano reciprocamente, come i quadrati delle B A, F A; di maniera che il prodotto del quadrato B A nell' altezza B C uguagli sempre le stesso prodotto del quadrato A F nell' altezza F D. Dico, che qualsivoglia prisma dell' altezza arbitraria B A, e della corrispondente lunghezza B C, colla data lunghezza A L, soddisfarà al quesito; imperocchè essendo come A E ad A L, cioè come il momento d' un peso pendente dalla lunghezza A E al momento dello stesso pendente dalla lunghezza A L, così

F G ad F D: ovvero così il prodotto di F G nel quadrato A F al prodotto di F D nel medesimo quadrato A F; cioè come il momento di resistenza della sezione A F G risultante nel dato prisma al momento di resistenza nella sezione A F D; è manifesto, che il momento di resistenza del dato prisma al momento di resistenza di un altro, la cui altezza A F larghezza F D, lunghezza A L, sarà come il momento del peso pendente dal primo prisma al momento dello stesso pendente dal secondo; e per tanto la resistenza di questo sarà uguale alla resistenza di quello. Ma essendo uguali i prodotti di F G nel quadrato A F, e di C B nel quadrato A B, sarà lo stesso il momento di resistenza nella sezione del prisma contenuto dalle rette A L, B A, B C, che dell' altro compreso dalla stessa lunghezza A L, dall' altezza A F, e dalla larghezza F D; adunque qualsivoglia de' sopraddetti prismi sarà d' uguale resistenza col prisma proposto, e sarà applicato alla medesima data lunghezza A L; il che ec.

Problema VIII.

Ritrovare infiniti solidi prismatici d' una data lunghezza, i quali a riguardo del proprio peso sieno della medesima resistenza, o si reggano sopra un sostegno solo

corrispondente ad uno de' suoi termini, o siano in ambi gli estremi sostenuti.

Si descriva coll'asse A B (Fig. CXXI.) la parabola A H nell' antecedente figura. Dico, qualunque prisma della lunghezza I B, e dell' altezza B A, colla data larghezza, soddisfare al quesito. Imperocchè essendo A B ad A F (ovvero multiplicando l'una e l'altra per B A F, il prodotto del quadrato A B in A F al prodotto del quadrato A F in A B) come il quadrato B I al quadrato F H: sarà il prodotto de' quadrati A F, B I, e della retta A B, e però il quadrato A B al quadrato di A F (cioè, per la comune larghezza de' prismi, il momento di resistenza nella sezione dell' altezza A B, al momento di quella, che avesse per altezza A F, per la proposizione 3. del Viviani) sarà, come il prodotto del quadrato della lunghezza I B nell' altezza A B, al prodotto del quadrato della lunghezza H F nell' altezza A F, cioè (per la medesima larghezza di ciascun prisma) come il momento del peso del prisma, a cui nella lunghezza I B serva di altezza la A B, al momento del peso d' un prisma, la cui lunghezza fusse H F, e l' altezza A F, in pari larghezza d' ambidue; onde nell' uno, e nell' altro sarà la stessa resistenza in riguardo del proprio peso; il che ec.

Corollario. Quindi l' ungula solida parabolica, tagliata dal cilindro eretto sopra la parabola A I B (Fig. CXXII.) raddoppia-

ta all'altra parte dell' asse A B, col piano P G A, che passando per la cima A della parabola, fosse inclinato a qualsivoglia angolo colla base: sarebbe un solido in qualunque sua parte ugualmente resistente, in riguardo del proprio suo peso: o fosse sostenuto sopra la linea A B, o fosse retto da' sostegni sottoposti d'intorno al suo perimetro I H A *b i*. Imperocchè dividendo il diametro A B in quante si voglia parti, e per ogni punto della divisione alzando tanti piani eretti alla base sopra tutte l'ordinate della parabola; ne risulterebbero altrettanti prismi iscritti a quest' ungula, tutti (per le cose ora dimostrate) d' eguale resistenza in riguardo al proprio peso; i quali prismi esaurirebbero tutta la solidità della detta ungula (accrescendo in infinito il numero d' essi, e scemandone in infinito altresì la larghezza) onde lo stesso effetto produrrebbe la medesima ungula intera, in cui verrebbero a terminare: e sarebbe cotesto solido ungulare uguale a 3. quinti dell' intiero prisma ugualmente alto eretto sopra la parabola stessa, per le cose da me dimostrate nello scolio della proposizione 28. de' problemi Vivianiani.

Si potrebbero qui aggiugnere due altri problemi della stessa natura de' precedenti, assai eleganti, ed adattati ad illustrare vie più questa stessa materia delle resistenze, proposti già nel tomo 15. del

Giornale Veneto articolo quarto. Ma potendosi agevolmente ivi vedere la soluzione data ad essi da me, e dal Sig. Giulio Fagnani, stimo bene di porre una volta termine ed alla fatica mia, ed al tedio de' Lettori, dando a questa operetta il bramato fine.

INDICE

Di ciò che si contiene in questo Volume.

Fine del Volume Nono.

		ERRORI	CORREZIONI
P. 88 l.	20	eum	cum
	27	ed	et
107	8	*hahentibus*	*habentibus*
174	6	perternatu-rale	preternatu-rale
205	15	detl'	dell'
215	8	vieue	viene
337	13	mentro	mentre

F
B
D
A
B
C
E
H
F. 13.
G
I
H
A
C
B
D
E
F
G
D
L
L
F. 1
C
F. 18.
A
B
F

Tav. IV.

F. 24.
C
D
E
H
F
G
A
B
G
L
M
A
B
F. 31.
M
A
C
L
E
F
G
B
D
H
I
K
T
F. 33
V
Z
D
A
X
M
P
R
G
F
O
E
K
I
L
Y
N
S
H
C
B

Tav. V.

F. 3
42.

F. 48.

F. 55.

F. 62.

Tav. VI.

65.
L
O
B
H
N
A
LM
H
G
G
M
P
E
P
I
C
D
F. 76.
I
G
H
A
B
A
B
F
B
C
D
F. 79
F. 83.
I
K
H
N
F
E
O
O
C
G
L
P
Q
A
F
A
C
D
M
B
L
F. 88.
N
A
C
I
B
D
A
C
B
D
K
G
H
G
H
N
M
N
A
E
F
E
F